



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Sprawozdanie za rok 2021
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy Poziom rozszerzony
<i>Termin egzaminu:</i>	5 maja 2021 r. – poziom podstawowy 11 maja 2021 r. – poziom rozszerzony
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	17 września 2021 r.

Opracowanie

Ewa Ludwikowska (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku)

Joanna Berner (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie)

Marian Pacholak (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie)

Mariusz Mroczek (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Hubert Rauch (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Redakcja

dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Opracowanie techniczne

Andrzej Kaptur (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Współpraca

Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Pracownie ds. Analiz Wyników Egzaminacyjnych okręgowych komisji egzaminacyjnych

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie

Plac Europejski 3, 00-844 Warszawa

tel. 22 457 03 35, fax 22 457 03 45

e-mail: info@oke.waw.pl

www.oke.waw.pl

Spis treści

Poziom podstawowy. Opis arkusza egzaminu maturalnego.....	4
Poziom podstawowy. Dane dotyczące populacji zdających	4
Poziom podstawowy. Przebieg egzaminu	5
Poziom podstawowy. Podstawowe dane statystyczne	6
Poziom rozszerzony. Opis arkusza egzaminu maturalnego	11
Poziom rozszerzony. Dane dotyczące populacji zdających	11
Poziom rozszerzony. Przebieg egzaminu	12
Poziom rozszerzony. Podstawowe dane statystyczne	13
Komentarz	16
Wnioski i rekomendacje	98

Poziom podstawowy. Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku 2021 egzamin maturalny z matematyki był przeprowadzony na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w załączniku nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki z dnia 16 grudnia 2020 r.¹

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 28 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego z jedną poprawną odpowiedzią oraz 7 zadań otwartych, w tym 6 krótkiej odpowiedzi i 1 rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań egzaminacyjnych określonych dla egzaminu maturalnego w roku szkolnym 2020/2021:

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji (dwa zadania zamknięte).
- II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (osiemnaście zadań zamkniętych i dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).
- III. Modelowanie matematyczne (pięć zadań zamkniętych, dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).
- IV. Użycie i tworzenie strategii (trzy zadania zamknięte, jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi, jedno zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
- V. Rozumowanie i argumentacja (jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla, linijki oraz kalkulatora prostego. Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 45 punktów.

Poziom podstawowy. Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 1. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających		43029
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	30137
	z techników	12892
	ze szkół na wsi	1363
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	7229
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	11242
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	23195
	ze szkół publicznych	37982
	ze szkół niepublicznych	5047
	kobiety	23044
	mężczyźni	19985
	bez dysleksji rozwojowej	37207
	z dysleksją rozwojową	5822

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 39 osób – laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

¹ Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczegółowych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

TABELA 2. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	341
	słabowidzący	52
	niewidomi	6
	słabosłyszący	68
	nieślyszący	33
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	9
	Ogółem	509

Poziom podstawowy. Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			5 maja 2021
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			170 minut
Liczba szkół			695
Liczba zespołów egzaminatorów			33
Liczba egzaminatorów			715
Liczba obserwatorów ² (§ 8 ust. 1)			26
Liczba unieważnień ³	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	4
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	1
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów ³ (art. 44zzz)			860

² Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r. poz. 2223, ze zm.).

³ Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2020 r. poz. 1327, ze zm.).

Poziom podstawowy. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

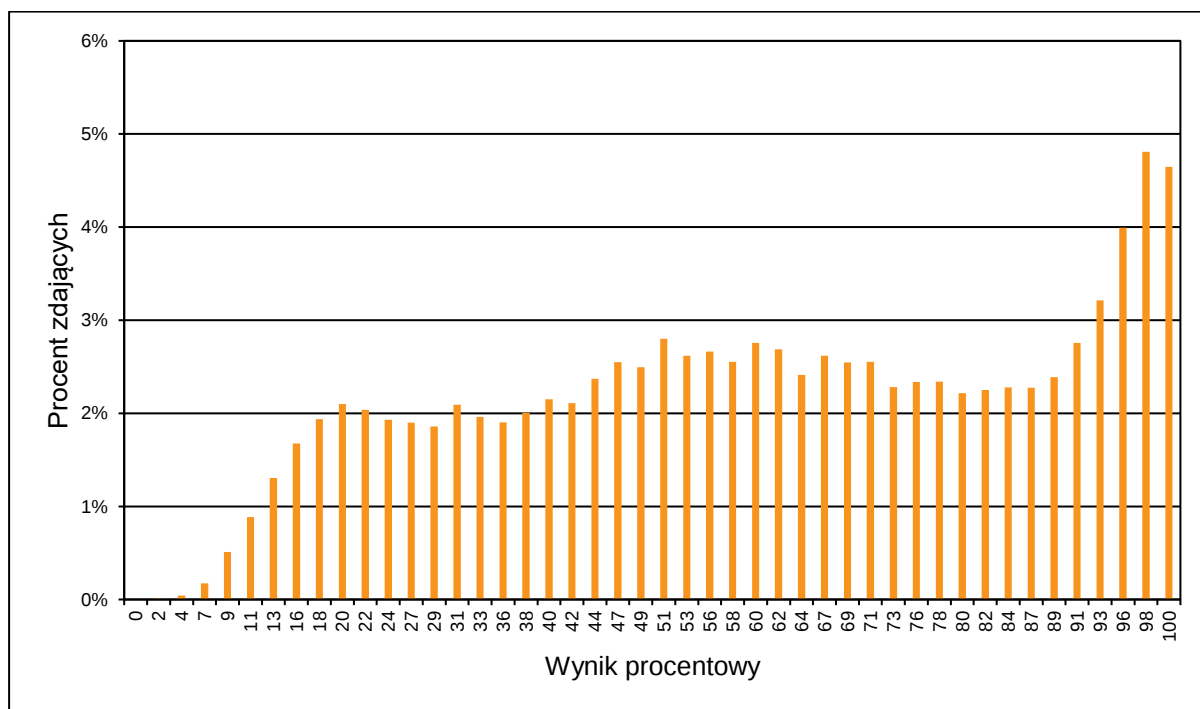


TABELA 4. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów (%)
ogółem	43029	0	100	62	98	61	26	74
w tym:								
z liceów ogólnokształcących	30137	0	100	69	98	66	26	81
z techników	12892	0	100	49	51	49	24	64

* Dane dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

Poziom wykonania zadań

TABELA 5. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

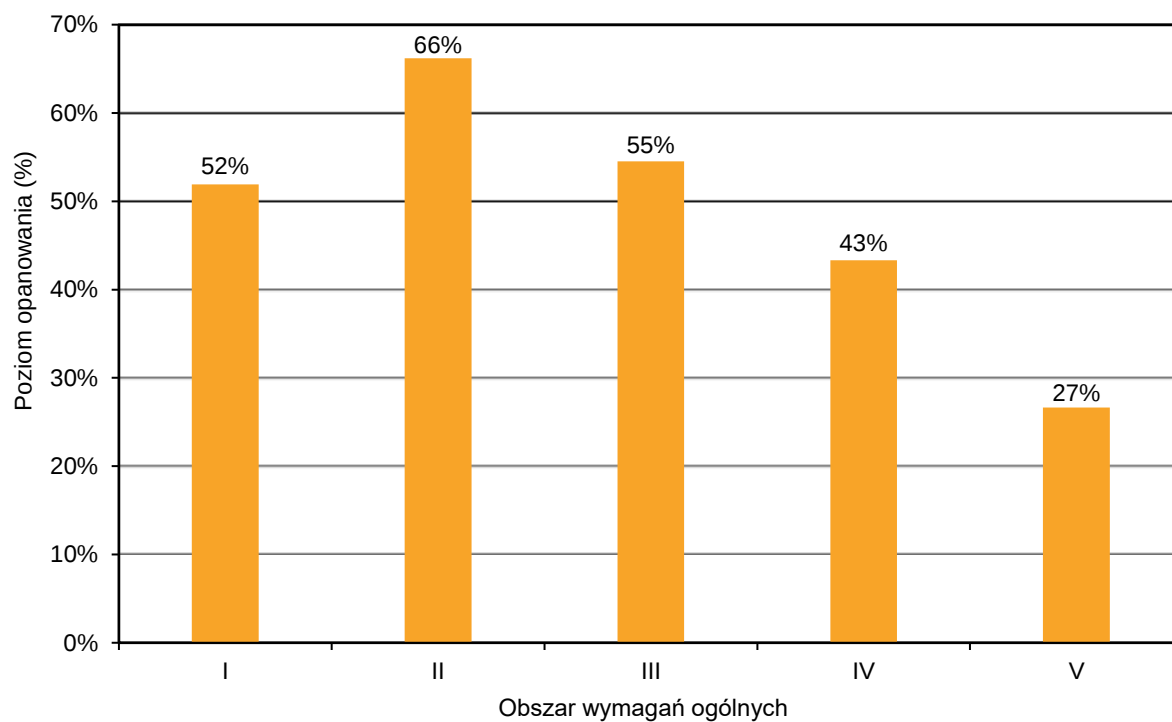
Wymagania egzaminacyjne 2021			
Nr zad.	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe <i>Gdy wymaganie szczegółowe dotyczy treści z III etapu edukacyjnego – dopisano „G”.</i>	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.	68
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.8) wykonuje obliczenia procentowe [...].	94
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.7) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.	71
4.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu [...] i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.	74
5.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 1.1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego [...]).	55
6.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.	67
7.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe [...]).	61
8.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.	69
9.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.	80
10.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$; 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu [...].	63
11.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu [...].	67

12.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([...] maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak [...]).	57
13.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego.	79
14.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.	64
15.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.	83
16.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi [...].	71
17.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.2) korzysta z własności stycznej do okręgu.	72
18.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych [...].	75
19.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G10.9) oblicza pola i obwody trójkątów [...].	61
20.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G10.7) stosuje twierdzenie Pitagorasa.	82
21.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.	52
22.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G10.8) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach.	80
23.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.	68
24.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G10.6) oblicza pole koła [...].	67
25.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.	49
26.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	38

27.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.	65
28.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G9.3) wyznacza [...] medianę zestawu danych.	79
29.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.	71
30.	V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G6.4) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne; G6.5) mnoży jednomiany, mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przypadkach, mnoży sumy algebraiczne.	33
31.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 4.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji [...].	41
32.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych [...].	61
33.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.	57
34.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	65
35.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dane dwa punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.	34

WYKRES 2.

POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



Poziom rozszerzony. Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku 2021 egzamin maturalny z matematyki był przeprowadzony na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w załączniku nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki z dnia 16 grudnia 2020 r.⁴

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 4 zadania zamknięte wielokrotnego wyboru, 11 zadań otwartych, w tym 7 zadań krótkiej i 4 zadania rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej z matematyki:

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji (jedno zadanie zamknięte).
- II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (jedno zadanie zamknięte i dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).
- III. Modelowanie matematyczne (jedno zadanie zamknięte, jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi i dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
- IV. Użycie i tworzenie strategii (jedno zadanie zamknięte, dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
- V. Rozumowanie i argumentacja (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla, linijki oraz kalkulatora prostego. Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

Poziom rozszerzony. Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 6. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających		12464
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	10581
	z techników	1883
	ze szkół na wsi	177
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	1614
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	3182
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	7491
	ze szkół publicznych	11785
	ze szkół niepublicznych	679
	kobiety	5094
	mężczyźni	7370
	bez dysleksji rozwojowej	10581
	z dysleksją rozwojową	1883

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 39 osób – laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

⁴ Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczegółowych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

TABELA 7. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	83
	słabowidzący	8
	niewidomi	0
	słabosłyszący	17
	niesłyszący	4
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	0
Ogółem		112

Poziom rozszerzony. Przebieg egzaminu

TABELA 8. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			11 maja 2021
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			523
Liczba zespołów egzaminatorów			33
Liczba egzaminatorów			715
Liczba obserwatorów ⁵ (§ 8 ust. 1)			14
Liczba unieważnień ⁶	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	1
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów ⁶ (art. 44zzz)			455

⁵ Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r. poz. 2223, ze zm.).

⁶ Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2020 r. poz. 1327, ze zm.).

Poziom rozszerzony. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 3. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

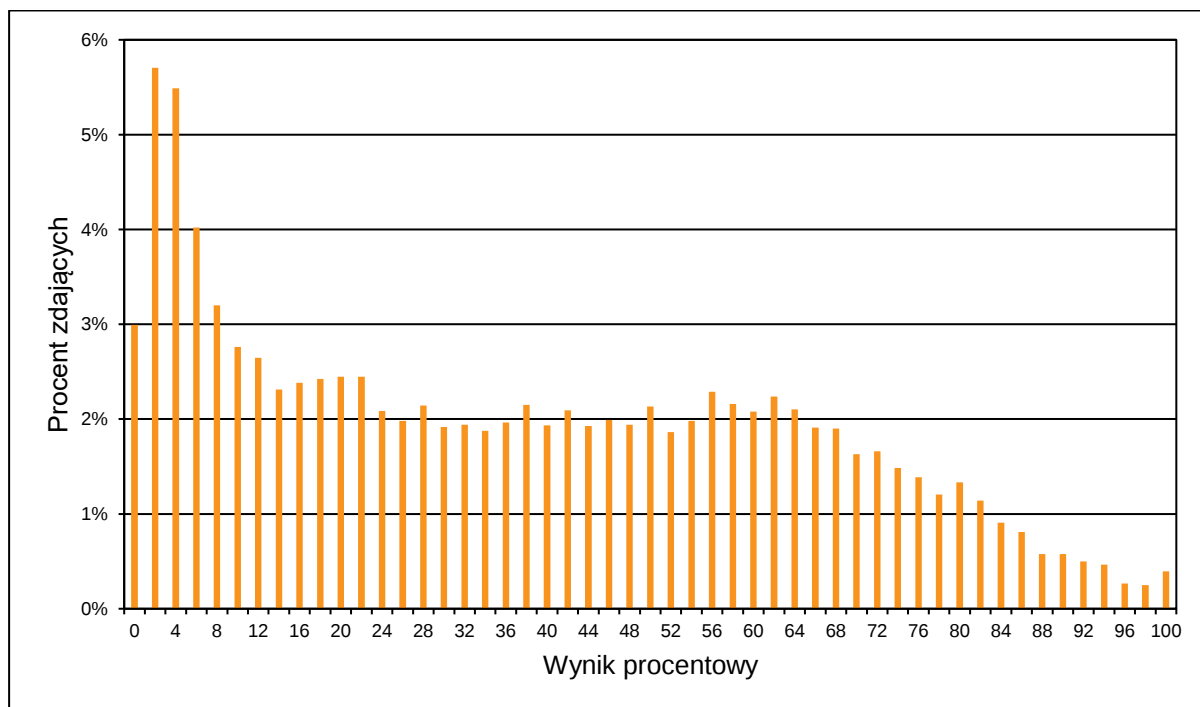


TABELA 9. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
ogółem	12464	0	100	34	2	37	27
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	9064	0	100	46	62	45	26
z techników	3400	0	94	8	2	16	17

* Dane dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

Poziom wykonania zadań

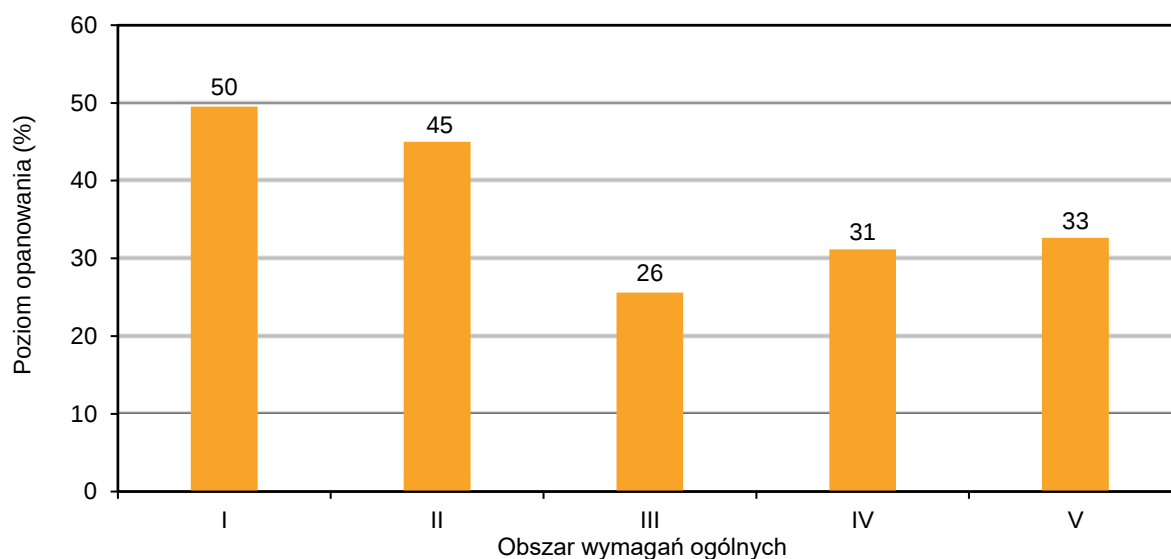
TABELA 10. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania egzaminacyjne 2021			
Nr zad.	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: R6.2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego).	54
2.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R6.4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych.	32
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R2.6) dzieli wyrażenia wymierne.	33
4.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.8) rozwiązuje równania [...] z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż $ x + 1 - 2 = 3$, $ x + 3 + x - 5 > 12$.	41
5.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R5.1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.	71
6.	V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: R1.2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.	58
7.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R3.7) rozwiązuje proste nierówności wymierne [...].	42
8.	V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G10.13) stosuje cechy przystawania trójkątów [...]. R7.3) rozpoznaje figury podobne [...].	18
9.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R10.2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.	33
10.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: P8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); R8.1) oblicza odległość punktu od prostej.	59
11.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.1) stosuje wzory Viète'a; R3.2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem;	42

		R3.7) rozwiązuje proste nierówności wymierne [...].	
12.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R6.6) rozwiązuje równania trygonometryczne [...].	24
13.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich [...].	25
14.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: P4.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich [...].	25
15.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R11.6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.	34

WYKRES 4.

POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



Komentarz

Analiza jakościowa zadań – poziom podstawowy

Analiza wskaźników poziomu wykonania zadań z matury na poziomie podstawowym zamieszczonych w **Tabeli 5.** na stronach 8–10 pozwala sformułować wniosek, że maturzyści najlepiej opanowali umiejętności:

1. wykonywania obliczeń procentowych
2. stosowania wzoru na n -ty wyraz i na sumę n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
3. stosowania twierdzenia Pitagorasa
4. wyznaczania średniej i mediany zestawu danych
5. korzystania z własności kątów i przekątnych w równoległobokach.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu (poziom wykonania – 94%) okazało się zadanie 2., w którym należało obliczyć liczbę z danego jej procentu. Zdecydowana większość zdających nie ma problemu z wykonywaniem obliczeń procentowych.

Kolejnym zadaniem, którego rozwiązanie nie sprawiło zdającym problemów, było zadanie 15. (poziom wykonania – 83%). W zadaniu tym zdający musieli wyznaczyć czwarty wyraz ciągu arytmetycznego, znając sumę wyrazów trzeciego i piątego tego ciągu. Zdecydowana większość zdających poprawnie stosowała wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, a nieliczni wykorzystywali związek między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Porównywalny wynik maturzyści osiągnęli w zadaniu 20. (poziom wykonania – 82%), w którym należało obliczyć długość jednego z boków trójkąta, mając daną długość drugiego boku i wiedząc, że wysokość trójkąta padająca na trzeci bok dzieli go na odcinki o określonych długościach. Zadanie wymagało umiejętności zastosowania twierdzenia Pitagorasa i nie sprawiło zdającym zbyt dużego kłopotu.

Niewiele niższy poziom wykonania (80%) odnotowano w zadaniu 22., w którym maturzyści, mając dany jeden z kątów równoległoboku, mieli policzyć, jaką miarę ma kąt między dwiema wysokościami opuszczonymi na sąsiednie boki tego równoległoboku. Do zadania dołączony był rysunek, dzięki któremu zbilansowanie kątów okazywało się prostą czynnością.

Taki sam poziom wykonania (79%) miało zadanie 28., w którym zdający, mając dany sześciowyrazowy niemalejący ciąg liczbowy i znając medianę wyrazów ciągu, musieli wyznaczyć niewiadomą użytą w opisie wyrazów tego ciągu.

Nietrudno zauważyć, że tegoroczni abiturienti na poziomie podstawowym, analogicznie do lat ubiegłych, najlepiej opanowali umiejętności stosowania pojęć oraz wykorzystywania elementarnych własności obiektów matematycznych w sytuacjach typowych. Zauważmy, że wymienione wyżej zadania, które zostały bezbłędnie rozwiązane przez blisko 80% i więcej zdających, są zadaniami jedno- lub dwuczynnościowymi. Zadania te nie mają szerszego kontekstu, a ich rozwiązanie nie wymaga wykonania dodatkowych czynności. Umiejętności sprawdzane tymi zadaniami zostały precyzyjnie opisane, a dodatkowo zadania

geometryczne były opatrzone rysunkami. Do rozwiązania zadań wystarczyło znać podstawowe pojęcia matematyczne i najważniejsze własności rozważanych obiektów, zrozumieć nieskomplikowany tekst matematyczny, zastosować właściwy algorytm i wykonać elementarne rachunki.

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najslabiej

Na **poziomie podstawowym** nadal największe trudności sprawiają maturzystom zadania polegające na przeprowadzeniu dowodu twierdzenia. W maju 2021 roku trudne dla maturzystów okazało się zadanie 30. Było to zadanie z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*, w którego rozwiązaniu zdający mieli wykazać się opanowaniem umiejętności podawania matematycznych argumentów uzasadniających poprawność rozumowania.

W zadaniu 30. zdający osiągnęli poziom wykonania 33%. Przyczyną tak niskich wyników jest zarówno niski poziom opanowania umiejętności przeprowadzania i zapisywania prostego rozumowania składającego się z kilku kroków, brak umiejętności poprawnego przekształcania wyrażeń algebraicznych, jak również opuszczenia zadania typu „wykaż” przez część maturzystów. Zauważyć jednak trzeba, że w porównaniu do lat ubiegłych coraz większy odsetek zdających podejmuje się rozwiązania tego typu zadań, choć są także tacy, którzy sprawdzają prawdziwość tezy dla konkretnych wybranych wartości liczbowych spełniających założenia.

Przeanalizujmy zatem poprawne sposoby rozwiązań oraz błędy, jakie wystąpiły w tym zadaniu. Maturzyści zmierzili się w nim z dowodem nierówności $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, której prawdziwość należało uzasadnić dla każdych trzech dodatnich liczb rzeczywistych a , b i c takich, że $a < b$.

Najczęściej stosowanym sposobem dowodzenia było równoważne przekształcanie nierówności $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ do postaci, z której po zastosowaniu założenia $a < b$ można przeprowadzić bezpośrednie wnioskowanie prawdziwości tezy.

W przykładach 1. i 2. przedstawiono rozwiązania zdających, w których są prawidłowo przeprowadzone rozumowania.

Przykład 1.

Założenie:
 $a, b, c \in \mathbb{R}^+ *$
 $a < b$

Teza:
 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

Dowód

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad | \cdot b * \quad \text{mnożymy obie strony przez } b > 0$$

$$a < \frac{b(a+c)}{b+c} \quad | \cdot (b+c) * \quad b+c > 0$$

$$a(b+c) < b(a+c)$$

$$ab + ac < ba + bc$$

$$ab + ac - ba < bc$$

$$ac < bc$$

$$ab = ba$$

Z założenia a jest mniejsze od b . Mnożymy liczby c z liczbą a , czyli mniejszą od b jest oczywiście mniejszą od iloczynu tej samej liczby c z liczbą b .

Zatem nierówność z tezy jest prawdziwa,
co należało udowodnić.

Przykład 2.

$$z: a, b, c > 0 \quad t: \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

d: Przekształcam tę równość.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad | \cdot b, \text{ bo } b \text{ z zał. } b > 0$$

$$a < \frac{b}{1} \cdot \frac{a+c}{b+c} \\ a < \frac{b(a+c)}{b+c} \quad | \cdot (b+c), \text{ bo z zał. } b > 0, c > 0$$

$$a(b+c) < b(a+c) \\ ab + ac < ba + bc$$

~~$$ab + ac < ba + bc$$~~

~~$$ab - ab + bc - ac$$~~

~~$$0 < bc - ac$$~~

~~$$0 < c(b-a)$$~~

bo c z zał.
 $c > 0$

bo a, b > 0 z zał. i $b > a$

Iloczyn dwóch liczb dodatnich da
wynik dodatni. $\square$.

Niestety część z piszących egzamin maturalny w 2021 roku przyjmowało założenia, które nie występowały w treści zadania i na podstawie tych błędnych założeń wnioskowało o prawdziwości tezy. Tego typu błędy zawierają rozwiązania z przykładów 3. i 4.

Przykład 3.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad a < b \quad a \geq 0 \quad b \geq 0 \quad c \geq 0$$
~~$$b(a+c) < a(b+c)$$

$$ab+cb < ab+ac$$

$$cb < ac \quad / : c$$

$$b < a$$~~

$$a(b+c) < b(a+c)$$

$$ab+ac < ab+bc$$

$$ac < bc \quad / : c$$

$$a < b$$

Przykład 4.

$$\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} > 0 \quad / \cdot (b+c)$$

$$a+c - \frac{a(b+c)}{b} > 0 \quad / \cdot b$$
~~$$ab + bc - ab - ac > 0$$~~

$$bc - ac > 0$$

$$c(b-a) > 0$$

$$\begin{matrix} c > 0 \\ b-a > 0 \end{matrix} \quad a < b \quad \blacksquare$$

Wśród błędnych rozwiązań występowały również takie, w których wielu zdających wykonywało sprawdzanie prawdziwości nierówności jedynie dla konkretnych wartości liczb a , b i c (przykłady 5.–7.).

Przykład 5.

$b + c \neq 0$
 Przyjmijmy, że $a = 1$ $b = 2$ ~~wtedy~~ więc
 $a < b$ a $c = 3$ wynika z tego, że:
 $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$, $\frac{5}{10} < \frac{8}{10} \leftarrow$ otrzymana ~~nie~~ nierówność
 po rozszerzeniu ułamka. Można
 dać dowolną liczbę, dowolne liczby
 dodatnie by równanie było spełnione.
 Można również poprzeć to tym że $c > a$,
 $c > b$, więc niemożliwym jest by
 równanie nie zostało spełnione,
 ponieważ c występuje tylko po
 prawej stronie.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	29.	30.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Przykład 6.

$$\begin{aligned}
 & \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \qquad a < b \\
 & a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3 \\
 & \frac{1}{2} < \frac{1+3}{2+3} \\
 & \frac{1}{2} < \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

Przykład 7.

$$a=1 \quad b=2 \quad c=3 \quad \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad | \cdot b \quad a = \frac{ab+ac}{b+c} \quad | \cdot (b+c)$$

$$ab+ac = ab+ac$$

$$1=1 \quad \text{C.N.U.}$$

Zgodnie z przyjętymi zasadami, zamieszczanymi corocznie w *Zasadach oceniania rozwiązań zadań*, publikowanych na stronie <https://cke.gov.pl/>, za rozwiązania, w których zdający sprawdza prawdziwość tezy jedynie dla wybranych wartości liczbowych przyznaje się 0 pkt.

Niemala część zdających nie potrafiła przekształcić równoważnie danej nierówności do postaci, z której można w łatwy sposób wnioskować o prawdziwości tezy i zaczynała wnioskować z takiej postaci, z której nie da się tezy uzasadnić (przykłady 8. oraz 9.) albo swojego rozumowania nie doprowadzała do końca. Niektórzy zdający rozpoczynali wnioskowanie o prawdziwości tezy z otrzymanej nierówności, która wcale nie była oczywista (przykłady 10. i 11.).

Przykład 8.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad | \cdot b$$

$$a < \frac{ab+bc}{b+c} \quad | \cdot (b+c)$$

$$a(b+c) < ab+bc$$
~~$$ab+ac < ab+bc \quad | : ab$$~~
~~$$ac < bc \quad | : c$$~~

$$a(b+c) < ab+bc$$

$$a(b+c) < a(b+c) \quad | : (b+c)$$

$$a(b+c) < b(a+c) \quad a < b \quad a, b, c > 0$$

nierówność prawdziwa

Często zdający, prowadząc przekształcenia tezy do postaci równoważnej, popełniali błędy merytoryczne (przykłady 12.–15.).

Przykład 12.

$$\begin{aligned}
 a &< b \\
 a-b &< 0 \\
 \frac{a}{b} &< \frac{a+c}{b+c} \quad | \cdot b \\
 a &= \frac{ab+bc}{b+c} \quad | \cdot (b+c) \\
 ab+ac &= ab+bc \quad | - ab \\
 ac &= bc \quad | - bc \\
 ac-bc &= 0 \\
 c(a-b) &= 0 \\
 c=0 \vee \underline{a-b=0}
 \end{aligned}$$

Przykład 13.

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} &< \frac{a+c}{b+c} & a > 0 \\
 & & b > 0 \\
 & & c > 0 \\
 \frac{a+c}{b+c} &> \frac{a}{b} \quad | - \frac{a}{b} \\
 \frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} &> 0 \\
 b \cdot \left(\frac{a+c}{b+c} \right) - (b+c) \frac{a}{b} &> 0 \\
 \frac{ab+bc}{bb+bc} - \frac{ab+ac}{bb+bc} &> 0 \\
 \frac{ab+bc-ab-ac}{bb+bc} &> 0 \\
 \frac{bc-ac}{bb+bc} &> 0 & bc > 0 \quad ac > 0 \\
 & & bb > 0 \quad bc > 0
 \end{aligned}$$

Przykład 14.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

$$b(a+c) < a(b+c)$$

$$ba + bc < ab + ac$$

$$\cancel{ab} + bc < \cancel{ab} + ac$$

$$bc < ac$$

$$bc - ac < 0$$

$$-ac < -bc$$

$$-a < -b$$

$$\underline{a < b} \rightarrow \text{liczba } a \text{ jest } \text{mniejsza} \text{ od liczby } b.$$

Przykład 15.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b} + 1 \quad \text{--- KĄŻDA LICZBA DODATNIA JEST MNIEJSZA OD NIEJ SAMEJ POWIĘKSZONEJ O 1.}$$

Wśród dowodów pojawiały się błędne metody, np. błędne wnioskowanie z faktu, że każda ze stron danej nierówności jest mniejsza od 1 (przykład 16.).

Przykład 16.

$$a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 \quad \text{niech } \frac{a}{b} = m$$

$$\frac{a+c}{b+c} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{b}}{\frac{b}{b} + \frac{c}{b}} = \frac{m + \frac{c}{b}}{1 + \frac{c}{b}} < 1$$

po licznik jest mniejszy od mianownika

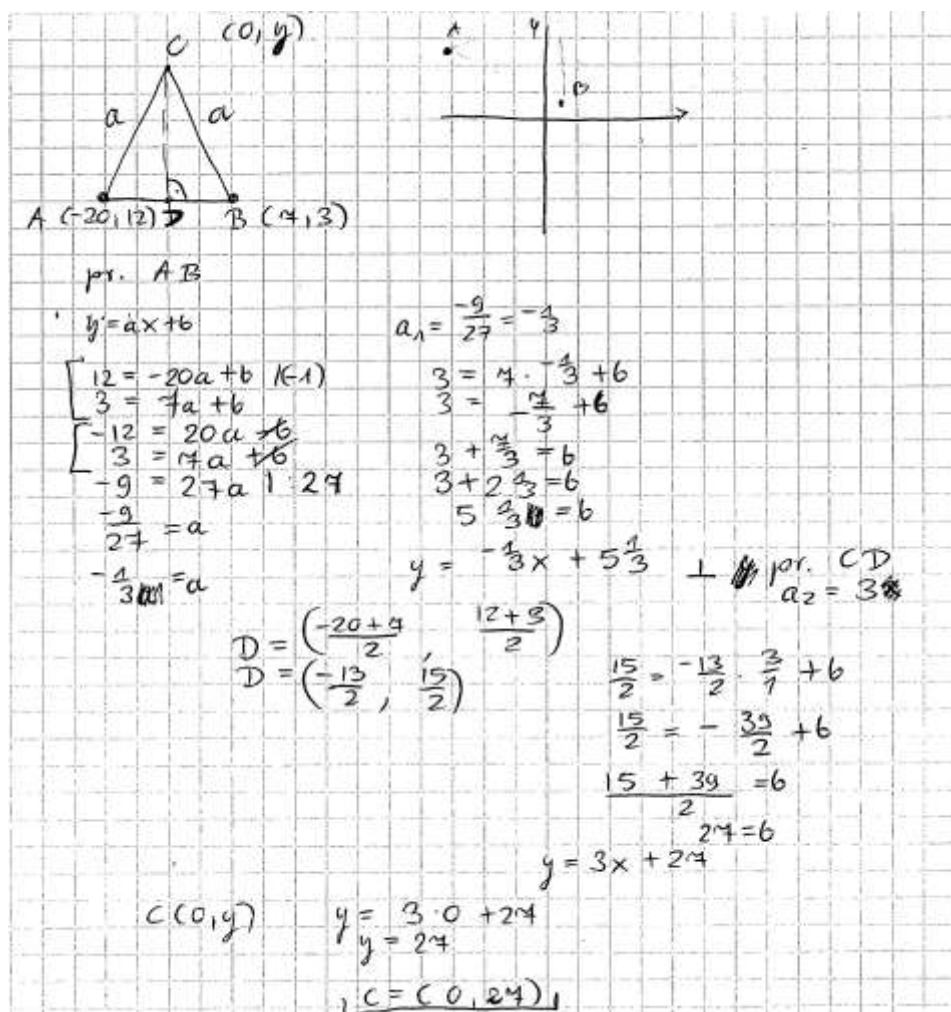
Nie mniejszy problem zdającym sprawiło zadanie 35. Było to zadanie z obszaru *Użycie i tworzenie strategii*, w którego rozwiązaniu zdający mieli wykazać się opanowaniem umiejętności z zakresu geometrii analitycznej, m.in. umiejętnością wyznaczania równania prostej przechodzącej przez dwa punkty, prostej prostopadłej do danej prostej, znajdowania punktów przecięcia dwóch prostych, obliczania długości odcinka i obwodu trójkąta, a także obliczania odległości punktu od prostej.

W zadaniu 35. zdający osiągnęli poziom wykonania 34%. Przyczyną tak niskich wyników jest niski poziom opanowania umiejętności z zakresu geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej, jak i brak umiejętności tworzenia strategii rozwiązania przez zdającego, co jest szczególnie istotne właśnie podczas rozwiązywania zadań rozszerzonej odpowiedzi, gdzie należy użyć (łączyć w spójną, logicznie uporządkowaną całość) kilka pojedynczych umiejętności.

Przyczyn niepowodzeń zdających w takich zadaniach należy również po części upatrywać w braku umiejętności czytania treści zadania ze zrozumieniem i poprawnej jej interpretacji, których to opanowanie umożliwia stworzenie całościowej koncepcji rozwiązania.

Najczęstszym sposobem rozwiązania zadania 35. było wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB , skorzystanie z faktu, że wierzchołek C leży na osi Oy oraz na symetralnej i wyznaczenie jego współrzędnych. Następnie obliczano długości boków trójkąta ABC oraz jego obwód. Oto przykład prawidłowego rozwiązania zdającego (przykład 17.).

Przykład 17.



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{729 + 81} = \sqrt{810}$$

$$|AC| = \sqrt{100 + 225} = \sqrt{625} = 25$$

$$|BC| = \sqrt{119 + 576} = \sqrt{625} = 25$$

$$\text{Obw}_{\Delta} = 25 + 25 + 9\sqrt{10} = 50 + 9\sqrt{10}$$

Innym sposobem rozwiązywania zadania było skorzystanie z faktu, że wierzchołek C trójkąta równoramiennego ABC leży na osi Oy , obliczenie jego współrzędnych przez porównanie długości ramion AC i BC , a następnie obliczenie długości boków trójkąta i jego obwodu (przykład 18.).

Przykład 18.

Diagram of triangle ABC with vertices $A(-20, 12)$, $B(7, 3)$, and $C(0, y)$. The triangle is isosceles with $|AC| = |BC|$.

Equations for side lengths:

$$|AC| = \sqrt{(0 - (-20))^2 + (y - 12)^2} = \sqrt{400 + y^2 - 24y + 144} = \sqrt{y^2 - 24y + 544}$$

$$|BC| = \sqrt{(0 - 7)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{49 + y^2 - 6y + 9} = \sqrt{y^2 - 6y + 58}$$

Setting $|AC| = |BC|$:

$$\sqrt{y^2 - 24y + 544} = \sqrt{y^2 - 6y + 58}$$

$$y^2 - 24y + 544 = y^2 - 6y + 58$$

$$-24y + 6y = 58 - 544$$

$$-18y = -486$$

$$y = 27$$

Coordinates of C : $C(0, 27)$.

Calculating side lengths:

$$|AC| = \sqrt{729 - 648 + 544} = \sqrt{625} = 25$$

$$|BC| = \sqrt{729 - 162 + 58} = \sqrt{625} = 25$$

$$|AB| = \sqrt{(7 - (-20))^2 + (3 - 12)^2} = \sqrt{27^2 + (-9)^2} = \sqrt{729 + 81} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$$

Perimeter:

$$\text{Obw} = 25 + 25 + 9\sqrt{10} = 50 + 9\sqrt{10}$$

Kolejnym sposobem prezentowanym przez zdających było wykorzystanie własności wektorów (przykład 19.).

Przykład 19.

$$\begin{aligned}
 &A = (-20, 12) \quad B = (-7, 3) \quad |AC| = |BC| \\
 &\triangle ABC \Rightarrow \text{równobramny} \\
 &C \in O_y \\
 &C = ?, \text{ Obw} = ? \\
 &C(0, y_c) \text{ lub } C(0, -y_c) \\
 &\downarrow \\
 &|AC| = |BC| \\
 &\vec{AC} = [0 + 20, y_c - 12] \\
 &\vec{AC} = [20, y_c - 12] \\
 &\vec{AB} = [4 + 20, 3 - 12] \\
 &\vec{AB} = [24, -9] \\
 &|AB| = \sqrt{24^2 + 9^2} = \sqrt{429 + 81} = \sqrt{510} = 9\sqrt{10} \\
 &\vec{BC} = [0 - 7, y_c - 3] \\
 &\vec{BC} = [-7, y_c - 3] \\
 &|AC| = \sqrt{20^2 + (y_c - 12)^2} \\
 &|AC| = \sqrt{400 + y_c^2 - 24y_c + 144} \\
 &|AC| = \sqrt{y_c^2 - 24y_c + 544} \\
 &|BC| = \sqrt{(-7)^2 + (y_c - 3)^2} \\
 &|BC| = \sqrt{49 + y_c^2 - 6y_c + 9} \\
 &|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58} \\
 &|AC| = |BC| \\
 &\sqrt{y_c^2 - 24y_c + 544} = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58} \quad /^2 \\
 &y_c^2 - 24y_c + 544 = y_c^2 - 6y_c + 58 \\
 &-18y_c = -486 \\
 &y_c = 27 \\
 &\underline{C(0, 27)} \\
 &\text{Obw.} = 9\sqrt{10} + 2 \cdot 25 = 50 + 9\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

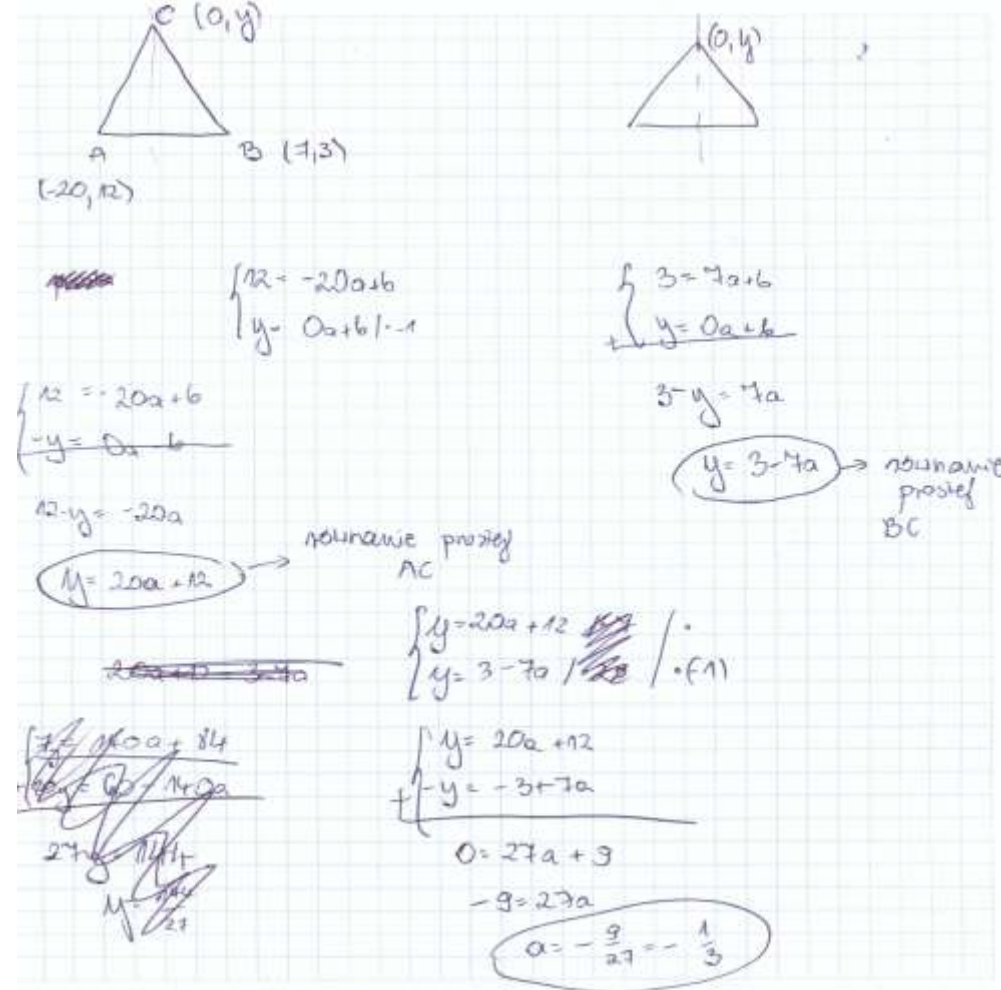
Błędne rozwiązania zadania 35. wynikały z braku znajomości położenia punktów w układzie kartezjańskim i mylenia przez zdających kolejności współrzędnych wierzchołka C (przykład 20.).

Przykład 20.

$$\begin{aligned}
 |AC| &= |BC| & C &= (x_c; 0) \\
 |AC| &= \sqrt{(x_c+20)^2 + (0-12)^2} \\
 |BC| &= \sqrt{(x_c-7)^2 + (0-3)^2} \\
 \sqrt{(x_c+20)^2 + (0-12)^2} &= \sqrt{(x_c-7)^2 + (0-3)^2} \\
 (x_c+20)^2 + 144 &= (x_c-7)^2 + 9 \\
 x_c^2 + 40x_c + 400 + 144 &= x_c^2 - 14x_c + 49 + 9 \\
 40x_c + 544 &= -14x_c + 58 \\
 54x_c &= -486 \\
 x_c &= -9 \\
 C &= (-9; 0) \\
 \text{Obwód} &= |AC| + |BC| + |AB| \\
 |AC| &= \sqrt{(-9+20)^2 + (0-12)^2} \neq \\
 |AC| &= \sqrt{11^2 + 144} \\
 |AC| &= \sqrt{265} & |AC| &= |BC| \\
 & & |BC| &= \sqrt{265} \\
 |AB| &= \sqrt{(7+20)^2 + (3-12)^2} \\
 |AB| &= \sqrt{729 + 81} \\
 |AB| &= \sqrt{810} \\
 \text{Obwód}_{ABC} &= 2\sqrt{265} + \sqrt{810} = 2\sqrt{265} + 3\sqrt{90}
 \end{aligned}$$

Część zdających nie ustrzegła się błędów rachunkowych (przykłady 21. i 22.).

Przykład 21.



$$\begin{cases} 12 = -20a + b \\ y = 0a + b \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = 7a + b \\ y = 0a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 = -20a + b \\ -y = 0a - b \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = 7a + b \\ 3 - y = 7a \end{cases}$$

$$12 - y = -20a$$

$$y = 20a + 12$$

$$y = 3 - 7a$$

$$y = 20a + 12$$

$$y = 3 - 7a$$

$$0 = 27a + 9$$

$$-9 = 27a$$

$$a = -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

$$y = a(0 - 20) + 12$$

$$y = -\frac{1}{3}(20) + 12 = -\frac{20}{3} + 12 = -6\frac{2}{3} + 12 = 5\frac{1}{3}$$

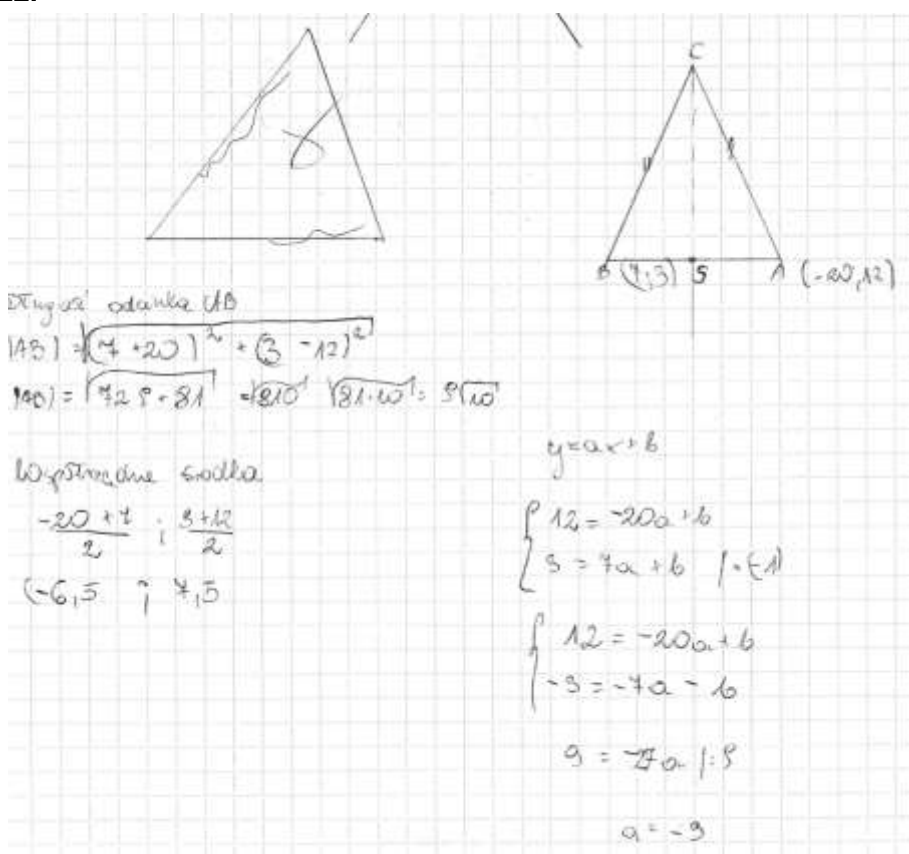
współrzędne wierzchołka C $\rightarrow (0, 5\frac{1}{3})$

$$|AB| = \sqrt{(-7 + 20)^2 + (3 - 12)^2} = \sqrt{27^2 + (-9)^2} = \sqrt{729 + 81} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$$

$$|BC| = \sqrt{(0 - 7)^2 + (5\frac{1}{3} - 3)^2} = \sqrt{49 + (\frac{2}{3})^2} = \sqrt{49 + \frac{4}{9}} = \sqrt{49 + \frac{4}{9}} = \sqrt{54\frac{4}{9}} = \sqrt{54} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}} = 3\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} = 2\sqrt{6}$$

Obwód $\Delta = 2 \cdot 3\sqrt{6} + 9\sqrt{10} = 6\sqrt{6} + 9\sqrt{10}$

Przykład 22.



$$3 = 4a + b$$

$$3 = 4a - 9$$

$$3 = -21 + b$$

$$-b = -21 - 3$$

$$-b = -24$$

$$b = 24$$

$$y = -3x + 24$$

Czasem błędy popełnione przez zdających prowadziły do zaskakujących wyników, np. do otrzymania dwóch wierzchołków C , których zdający nie potrafili zinterpretować i wybrać właściwego rozwiązania (przykłady 23. i 24.).

Przykład 23.

rys poglądowy

$S = \text{Środek } |AB| = \left(\frac{-20+3}{2}, \frac{7+(-12)}{2} \right) = \left(-\frac{17}{2}, -\frac{5}{2} \right)$
 $\therefore$ prosta przechodząca przez AB : $(y-12)(7+20) - (3-12)(x+20) = 0$
 $(y-12) \cdot 27 + 9(x+20) = 0$
 $27y - 324 + 9x + 180 = 0 \quad / :9$
 $3y - 36 + x + 20 = 0$
 $3y = -x + 36 - 20$
 $3y = -x + 16$
 $y = -\frac{1}{3}(x-16)$

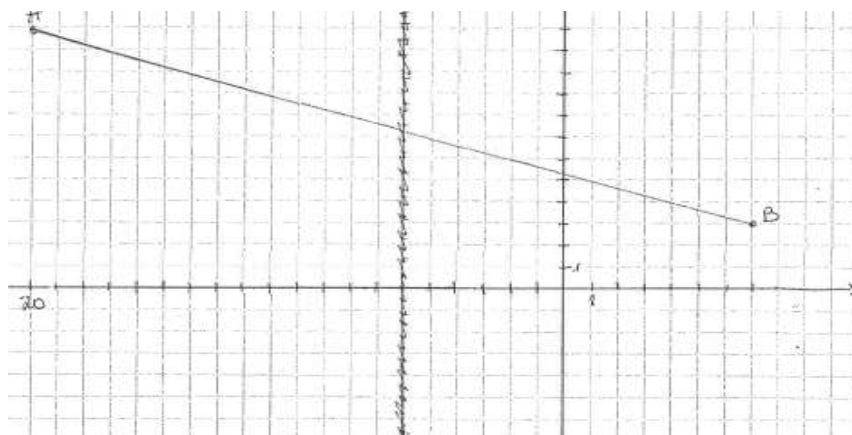
wysokość: prosta przechodząca przez punkt S , prostopadła do prostej AB ; i przech. przez punkt $(0, y)$

$a_1 \cdot a_2 = -1$
 $-\frac{1}{3} \cdot a_2 = -1$
 $a_2 = 3$
 $y = 3x + b$

$y = 3\left(x + \frac{17}{2}\right) + \frac{49}{2}$
 $y = 3x + \frac{39}{2} + \frac{49}{2}$
 $y = 3x + 27$
 $y = 3(x+9)$
 $\times$
 $C(0, y)$
 $y = 3(0+9) = 3 \cdot 9 = 27$
 $C = (0, 27) \quad \vee \quad C = (0, -27)$

$|AB| = \sqrt{(7+20)^2 + (3-12)^2} = \sqrt{27^2 + (-9)^2} = \sqrt{729 + 81} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$
 $|AC| = |BC| = \sqrt{(7-0)^2 + (7-27)^2} = \sqrt{7^2 + (-20)^2} = \sqrt{49 + 400} = 25$
 $O_{\text{obs}} = 25 + 25 + 9\sqrt{10} = 50 + 9\sqrt{10}$

Przykład 24.



$$A = (-20, 12)$$

$$B = (7, 3)$$

$$|AC| = |BC|$$

$\Delta ABC \Rightarrow$ równoramienne

$$C \in O_y$$

$$C = ? , Obw = ?$$

$$C(0, y_c) \text{ lub } C(0, -y_c)$$

$\downarrow$

$$|AC| = |BC|$$

$$\vec{AC} = [0 + 20, y_c - 12]$$

$$\vec{AC} = [20, y_c - 12]$$

$$\vec{AB} = [7 + 20, 3 - 12]$$

$$\vec{AB} = [27, -9]$$

$$|AB| = \sqrt{27^2 + 9^2} = \sqrt{729 + 81} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$$

Wzajemnie,

$$\vec{BC} = [0 - 7, y_c - 3]$$

$$\vec{BC} = [-7, y_c - 3]$$

$$|AC| = \sqrt{20^2 + (y_c - 12)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{400 + y_c^2 - 24y_c + 144}$$

$$|AC| = \sqrt{y_c^2 - 24y_c + 544}$$

$$|AC| = |BC|$$

$$\sqrt{y_c^2 - 24y_c + 544} = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58} \quad /^2$$

$$y_c^2 - 24y_c + 544 = y_c^2 - 6y_c + 58$$

$$-18y_c = -486$$

$$y_c = 27$$

$$C(0, 27)$$

$$|BC| = \sqrt{(-7)^2 + (y_c - 3)^2}$$

$$|BC| = \sqrt{49 + y_c^2 - 6y_c + 9}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

$$|BC| = \sqrt{y_c^2 - 6y_c + 58}$$

Odpowiedź: Punkt C może mieć współrzędne: $C(0, 27)$ lub $C(0, -27)$

Obwód $\Delta ABC = 2 \cdot 25 + 9\sqrt{10} = 50 + 9\sqrt{10}$

Wypolnia
egzaminator

Nr zadania
Maks. liczba pkt

35.

5

a obwód ΔABC
wynosi $50 + 9\sqrt{10}$

Analiza jakościowa zadań – poziom rozszerzony

Analiza wskaźników poziomu wykonania zadań występujących w zestawie egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym pozwala sformułować wniosek, iż wśród zadań występujących w zestawie egzaminacyjnym żadne z zadań nie było bardzo łatwe, ani nawet łatwe dla tegorocznych maturzystów, a jedynie cztery zadania były umiarkowanie trudne.

Spośród tegorocznych zadań najłatwiejsze były te, przy rozwiązywaniu których należało wykorzystać powszechnie znane wzory lub zastosować konkretne twierdzenia w typowych kontekstach.

Najłatwiejsze dla zdających było zadanie 5. (poziom wykonania zadania 71%), które sprawdzało umiejętność obliczania granic ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

Z kolei zadanie 10., przy rozwiązywaniu którego należało wykazać się umiejętnością wyznaczenia równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, obliczenia odległości punktu od prostej, a także wyznaczenia współrzędnych punktu styczności okręgu i prostej, poprawnie rozwiązało 59% zdających. Podobny poziom wykonania (52%) został osiągnięty dla zadania 6., w którym należało wykazać prawdziwość równości w oparciu o własności logarytmów.

Umiarkowanie trudne dla zdających (poziom wykonania – 54%) okazało się również zadanie 1., w którym należało wykorzystać wzór na cosinus podwojonego kąta i wyznaczyć wartość funkcji cosinus kąta o mierze wyrażonej w stopniach.

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najłabiej

Na **poziomie rozszerzonym** znalazły się trzy zadania, których poziom wykonania był niższy niż 20%.

Najwięcej problemów tegoroczni maturzyści na poziomie rozszerzonym mieli z rozwiązaniem zadania 8., o czym świadczy niski poziom wykonania tego zadania – 18%. Sprawdzało ono umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*, a wymagało przeprowadzenia dowodu geometrycznego – wykazania, że pole trójkąta DBP opisanego w treści zadania jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta równobocznego ABC .

Sposobów wykazania zależności między polami trójkątów było kilka. Najpopularniejszym z nich było wykorzystanie przystawiania trójkątów ABE i BCD oraz podobieństwa trójkątów DBP i DCB , zastosowanie twierdzenia cosinusów i porównanie pól trójkątów DBP i ABC (przykłady 25.–27.).

Przykład 25.

$$|\angle ABE| = \alpha \quad |\angle AEB| = \beta$$

Ponieważ $\triangle ABE$ jest przystającym do $\triangle BCD$ w (bkb)

$$\text{TO } |\angle BDC| = |\angle AEB| = \beta$$

$$\text{W trójkącie } \triangle DBP \quad |\angle DBP| = |\angle ABE| = \alpha$$

$$|\angle BDP| = |\angle BDC| = \beta$$

Więc $\triangle BDP$ jest podobny do $\triangle ABE$ w (kkk)

$$\frac{|PD|}{|DB|} = \frac{|DB|}{|DC|} \quad |PD| = \frac{|DB|^2}{|DC|} \quad |DB| = \frac{2}{3}a$$

Z tw cos w $\triangle DBC$

$$|DC|^2 = |BC|^2 + |DB|^2 + 2 \cdot |BC| \cdot |DB| \cos 60^\circ$$

$$|DB|^2 = a^2 + \frac{4}{9}a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{9}a^2 - \frac{2}{3}a^2 = \frac{4}{9}a^2$$

$$|DB| = \frac{2}{3}a$$

Skala podobieństwa

$$k = \frac{|PD|}{|DB|} = \frac{\frac{4}{9}a^2}{\frac{2}{3}a} \cdot \frac{3}{1a} = \sqrt{7}$$

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle DBP} \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$P_{\triangle DBP} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

W trójkącie

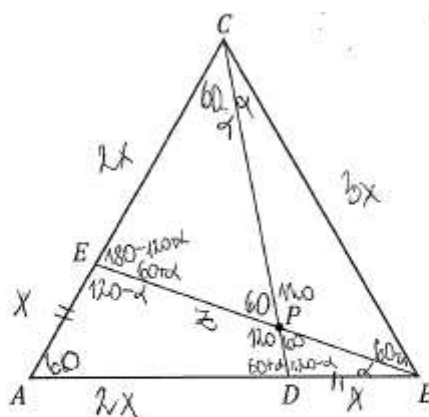
w $\triangle ABC$

$$P_{\triangle DBP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1}{7}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 21 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{12 \cdot 7} = 21 \cdot P_{\triangle DBP}$$

$$\frac{P_{\triangle DBP}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{1}{21}$$

Przykład 26.

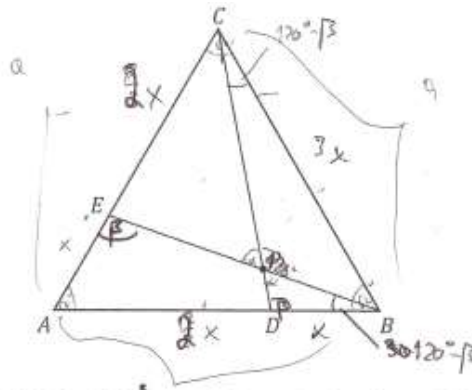


Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

$$\begin{aligned}
 P_{ABC} &= \frac{9x^2\sqrt{3}}{4} \\
 P_{ECD} &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 3x \cdot \sin 60^\circ = 3x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2 = \frac{6\sqrt{3}}{4} x^2 \\
 P_{AEB} &= \frac{9\sqrt{3}x^2}{4} - \frac{6\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 \\
 z^2 &= x^2 + 9x^2 - 2x \cdot 3x \cos 60^\circ \\
 z^2 &= 10x^2 - 6x^2 \cdot \frac{1}{2} \\
 z^2 &= 10x^2 - 3x^2 \\
 z &= \sqrt{7} x \\
 P_{PBD} &= \frac{1}{7} P_{AEB} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} P_{ABC} \\
 P_{PBD} &= \frac{1}{21} P_{ABC}
 \end{aligned}$$

Innym sposobem rozwiązania zadania prezentowanym przez zdających jest wyznaczenie długości odcinków $|CD|$ z twierdzenia Stewarta, a następnie wyznaczenie skali podobieństwa i skorzystanie ze związku pomiędzy skalą podobieństwa i polami figur podobnych (przykład 27.).

Przykład 27.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

$\triangle AEB \sim \triangle ACD$ (na podstawie bkb)
 $P_{\triangle PDB} = P_{\triangle CEP}$ $P_{\triangle ACD} = 2 P_{\triangle ABE}$ (po samej wysokości, 2x większa podstawa)
 $P_{\triangle ADP} + P_{\triangle CEP} = 2 P_{\triangle ADP} + 2 P_{\triangle DBP}$
 $P_{\triangle CEP} = P_{\triangle ADP} + 2 P_{\triangle DBP}$
 $P_{\triangle DBP} = \frac{P_{\triangle CEP} - P_{\triangle ADP}}{2}$
 $\triangle CDB \sim \triangle AEB$ (znowy bkb)
 $\angle PDB = \angle AEB$ $\angle AEPD = \angle CPD$
 $\angle EBA = 120^\circ - \beta$
 $\alpha = 60^\circ$
 $\triangle PDB \sim \triangle BEP$ (bkb)
 $|BE|$ z tw. Steuarta
 $9x^2 = 2x + 9x^2 - x = 3x^2 (|BE| + 7x)^2$
 $9x^2 = 4x^2 + 2x \cdot |BE| + |BE|^2$
 $|BE| = \sqrt{7}x$ $P_{\triangle AEB} = 7 P_{\triangle PDB}$
 $P_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot x \cdot 3x = \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4}$
 $P_{\triangle ABC} = 9 \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$

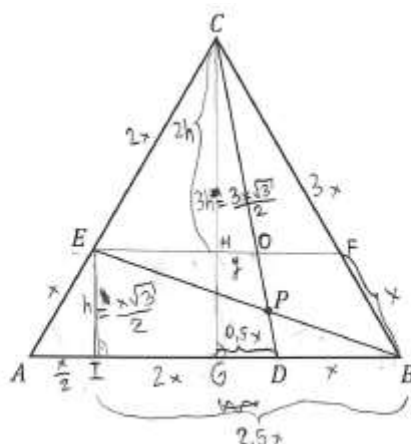
$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta AEB}} = \frac{\frac{9 \times \sqrt{3}}{4}}{\frac{3 \times \sqrt{3}}{4}} = 3$$

$$\frac{P_{\Delta AEB}}{P_{\Delta PDB}} = 7$$

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta PDB}} = 7 \cdot 3 = 21$$

Ciekawym sposobem przeprowadzenia dowodu był sposób oparty na poprowadzeniu odcinków równoległych do boków trójkąta ABC , następnie skorzystaniu z podobieństwa odpowiednich trójkątów i wyznaczeniu skali podobieństwa oraz pól szukanych trójkątów (przykłady 28.–30.).

Przykład 28.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

$$\Delta ABE \sim \Delta PBD$$

$$\Delta DBP \sim \Delta OPE \text{ (bkb)}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta EFC$$

$$\frac{AC}{EC} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{(3x)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$3h = \frac{3x\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{3x\sqrt{3}}{6} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{|GD|}{|HO|} = \frac{0,5x}{y} = \frac{3}{2}$$

$$x = 3y$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

$$|EF| = 2x$$

$$|EO| = \frac{1}{2} \cdot 2x + y = x + \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x$$

$$\frac{|EO|}{|DB|} = \frac{\frac{4}{3}x}{x} = \frac{4}{3}$$

$$|EB| = 2,5x$$

$$(2,5x)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 = |EB|^2$$

$$6,25x^2 + \frac{3}{4}x^2 = |EB|^2$$

$$7x^2 = |EB|^2$$

$$|EB| = \sqrt{7}x$$

$$\frac{|EP|}{|PB|} = \frac{4}{3}$$

$$3|EP| = 4|PB| \Rightarrow |EP| = \frac{4}{3}|PB|$$

$$|EP| + |PB| = \sqrt{7}x$$

$$\frac{4}{3}|PB| + |PB| = \sqrt{7}x$$

$$\frac{7}{3}|PB| = \sqrt{7}x$$

$$|PB| = \frac{3\sqrt{7}}{7}x$$

$$\frac{|PB|}{|AB|} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{7}x}{3x} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{7}}{7} = k$$

$$P_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$k^2 = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

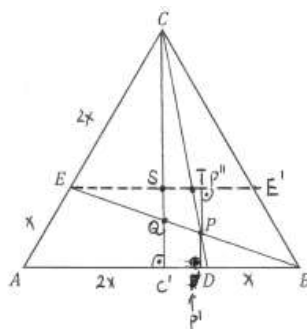
$$\frac{P_{\triangle DPB}}{P_{\triangle AEB}} = \frac{1}{7} = \frac{P}{\frac{3\sqrt{3}x^2}{4}}$$

$$7P = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$P = \frac{3\sqrt{3}x^2}{28}$$

$$\frac{P_{DBP}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^2}{28}}{\frac{9\sqrt{3}x^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{28} \cdot \frac{4}{9\sqrt{3}x^2} = \frac{1}{21} \text{ c.n.d.}$$

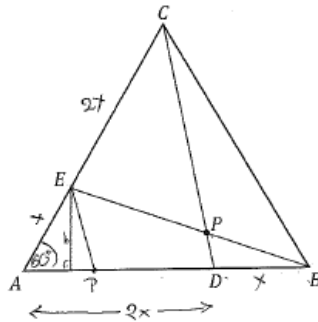
Przykład 29.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

$$\begin{aligned}
 |EE'| &= |EE'| \parallel |AB| & |CC'| \perp |AB| & |AD| = 2x = |CE| \\
 H = |CC'| &= \frac{3x\sqrt{3}}{2} & |DB| = x = |AE| & \\
 \triangle CET \sim \triangle CAD \text{ (kkk)} & & |AC'| = |BC'| \text{ (wys. tr. równobocznego)} & \\
 \frac{|CE|}{|ET|} = \frac{|CA|}{|AD|} & |AD| = 2x & |CD| = \frac{3}{2}x - x = \frac{x}{2} & \\
 \frac{2x}{|ET|} = \frac{3x}{2x} & \Rightarrow \frac{2}{|ET|} = \frac{3}{2x} & |SC'| = H - \sqrt{3}x & \\
 |ET| = \frac{2 \cdot 2x}{3} = \frac{4}{3}x & & = \frac{3x\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x & \\
 & & = \frac{\sqrt{3}}{2}x & \\
 \frac{|CE|}{|CS|} = \frac{|CA|}{|CD|} & & & \\
 \frac{2x}{|CS|} = \frac{3x}{\frac{x}{2}} & & & \\
 |CS| = \sqrt{3}x & & & \\
 \triangle ETP \sim \triangle BDP \text{ (kkk)} & & |PP''| \text{ i } |PP'| - \text{wys. odpowiednio } \triangle ETP & \\
 \frac{|ET|}{|BD|} = \frac{|PP''|}{|PP'|} & & \text{ i } \triangle BDP & \\
 \frac{\frac{4}{3}x}{x} = \frac{|SC'| - |PP'|}{|PP'|} & & & \\
 \frac{4}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x - |PP'|}{|PP'|} & & & \\
 \frac{4}{3}|PP'| = \frac{3\sqrt{3}x}{4} - 3|PP'| & & & \\
 |PP'| = \frac{3\sqrt{3}x}{14} & & & \\
 S_{\triangle BDP} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{3\sqrt{3}x}{14} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{28} & & & \\
 S_{\triangle ABC} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4} & & & \\
 \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BDP}} = \frac{\frac{9x^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{3}x^2}{28}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{28}{3} = 3 \cdot 7 = 21 & & &
 \end{aligned}$$

Przykład 30.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

Szkic Działania:

Poprowadzimy proste równoległe do DC przechodzącą przez punkt E. Wykazywać będziemy, że jest ona prosta AB w punkcie P.

Z Tw. Talesa: $|AE| = |AP|$

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AP|}{|AB|}$$

$$\frac{x}{2x} = \frac{|AP|}{2x}$$

$$|AP| = \frac{2}{3}x \Rightarrow |PD| = \frac{4}{3}x \Rightarrow |PB| = \frac{8}{3}x$$

$$|DB| = x$$

$$\triangle PBE \sim \triangle PDB \text{ (kąt/kąt/kąt)}$$

$$|\angle PBE| = |\angle PDB| \text{ ten sam kąt}$$

$$|\angle BDP| = |\angle BPE| \text{ (dwie proste równoległe przecięte trzecią)}$$

$$|\angle PEB| = |\angle DPB| \text{ ———— } || \text{ ———— }$$

$$P_{\triangle APE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AP| \cdot \sin |\angle APE| = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2}{3}x \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 \quad P_{\triangle APE} = \frac{|AP| \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}x \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$P_{\triangle PBE} = \frac{|PB| \cdot h}{2} = \frac{\frac{8}{3}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{3}$$

$$k = \frac{|DB|}{|PB|} = \frac{x}{\frac{8}{3}x} = \frac{3}{8}$$

$$k^2 = \frac{9}{64}$$

$$P_{\triangle DBP} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{3} \cdot \frac{9}{64} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{32}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$\frac{P_{\triangle DBP}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^2}{32}}{\frac{2\sqrt{3}x^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{32} \cdot \frac{4}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{2} = \frac{3}{8}$$

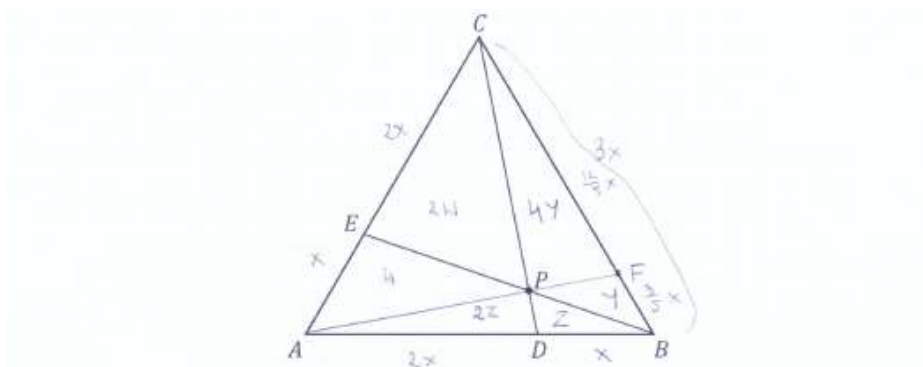
Zauważ: $\triangle ABC$ - równoboczny
 $|BD| = |AE| = \frac{1}{3}|AB|$

P - punkt przecięcia CD i BE

$$\text{Teza: } P_{\triangle DBP} = \frac{1}{21} P_{\triangle ABC} \quad \frac{P_{\triangle DBP}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{1}{21}$$

Wśród ciekawych rozwiązań prezentowanych przez zdających były rozwiązania, w których zastosowano twierdzenie Cevy (przykład 31.).

Przykład 31.



$$T: \frac{P_{ABC}}{P_{DEP}} = 21 \cdot P_{DEP}$$

$$T: \frac{P_{ABC}}{P_{DEP}} = 21$$

niech $|AB| + |BC| = |AC| = 3x$, $x > 0$
 wtedy $|BD| + |AE| = x$

z tw. Cevy:

$$\frac{x}{x} \cdot \frac{2x}{x} \cdot \frac{|BF|}{|FC|} = 1$$

$$4 \cdot \frac{|BF|}{|FC|} = 1 \Rightarrow \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{1}{4} \text{ a } |BF| + |FC| = 3x \Rightarrow |BF| = \frac{3}{5}x$$

$$|FC| = \frac{12}{5}x$$

niech $P_{AEP} = w$, $P_{BEP} = z$, $P_{CEP} = y$, wtedy
 $P_{EPD} = 2w$, $P_{BPD} = 2z$, $P_{APC} = 4y$ (bo poszczególne pary trójkątów mają to same wysokości ale inne stosunki długości podstaw)

z podziału na części

$$\frac{2w + w + 2z}{4y + y + z} = \frac{2}{1} \Rightarrow 3w + 2z = 10y + 2z \Rightarrow 3w = 10y \Rightarrow w = \frac{10}{3}y$$

$$\frac{2w + 5y}{3z + w} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2w + 5y = 6z + 2w \Rightarrow 5y = 6z \Rightarrow z = \frac{5}{6}y$$

$$\frac{3w + 4y}{3z + y} = \frac{4}{1} \Rightarrow 3w + 4y = 12z + 4y \Rightarrow 3w = 12z \Rightarrow w = 4z$$

$$w = \frac{10}{3}y$$

$$z = \frac{5}{6}y \Rightarrow y = \frac{6}{5}z$$

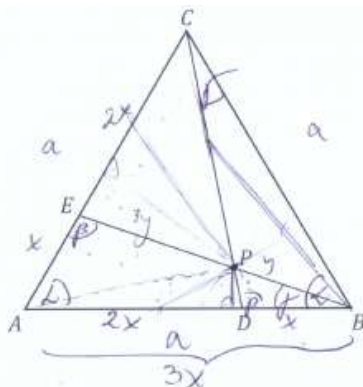
$$P_{ABC} = 3w + 5y + 3z = 12z + 6z + 3z = 21z$$

$$P_{DEP} = z$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEP}} = \frac{21z}{z} = 21 \text{ ok!}$$

Niektórzy zdający w swoim rozumowaniu wielokrotnie korzystali z faktu, że stosunek pól trójkątów o wspólnej wysokości jest równy stosunkowi długości podstaw, na które ta wysokość jest opuszczona (przykład 32.).

Przykład 32.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

Teza: $21P_{\triangle DBP} = P_{\triangle ABC}$

Dowod: $a = 3x$

$P_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2 \sqrt{3}}{4}$

$P_{\triangle ADP} = 2P_{\triangle BPD}$ oraz $2P_{\triangle APE} = P_{\triangle EPC}$

$P_{\triangle ADC} = 2P_{\triangle BDC}$

$|x AEB| \equiv |x BDP|$ po przesunięciu boków $\triangle$ równobocznych w tych samych stosunkach ($\frac{1}{3}$) zatem $\triangle AEB \equiv \triangle BDC$

$P_{ADPE} = P_{BDC}$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3x\sqrt{3}}{2}$

~~$P_{\triangle DBP} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \cdot x \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{8}$~~

~~$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{2} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$~~

$h_{ABC} \cdot \frac{3}{21} = \frac{3x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{21} = \frac{3x\sqrt{3}}{14}$

$P_{\triangle DBP} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \quad a = x \quad h = \frac{3x\sqrt{3}}{14}$

$P_{\triangle DBP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{14} = \frac{3x\sqrt{3}}{28}$

$\frac{P_{\triangle DBP}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3x\sqrt{3}}{28}}{\frac{9x^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{3x\sqrt{3}}{28} \cdot \frac{4}{9x^2\sqrt{3}} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$

c.n.d.

Część zdających prowadząc dowód umieszczali trójkąt ABC w układzie współrzędnych tak, aby wierzchołek C leżał w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i przeprowadzali dowód z zastosowaniem wektorów (przykład 33.).

Przykład 33.

Rokształcamy wzrostek górnego znajdującego się na wierzchołku
współrzędnych $A=(0,0)$ $B=(a,0)$ $C=(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$

$$\vec{AE} = \frac{1}{3} \vec{AC} = [\frac{a}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{6}] \Rightarrow E = (\frac{a}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{6})$$

$$D = (\frac{2}{3}a, 0)$$

Wzrostek EB : $y = a_1x + b_1$

$$a_1 = \frac{0 - \frac{a\sqrt{3}}{6}}{a - \frac{a}{6}} = -\frac{a\sqrt{3}}{5}$$

$$0 = -\frac{a\sqrt{3}}{5} \cdot a + b_1$$

$$b_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{5}$$

$$y = -\frac{a\sqrt{3}}{5}x + \frac{a^2\sqrt{3}}{5}$$

Wzrostek CD : $y = a_2x + b_2$

$$a_2 = \frac{0 - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{3}a - \frac{a}{2}} = -3\sqrt{3}$$

$$0 = -3\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}a + b_2$$

$$b_2 = 2a\sqrt{3}$$

$$y = -3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}a$$

$$-\frac{a\sqrt{3}}{5}x_{12} + \frac{a^2\sqrt{3}}{5} = 2\sqrt{3}a^2 - 3\sqrt{3}x_{12} + 2\sqrt{3}a^2 \cdot 5$$

$$14\sqrt{3}x_{12} = 9\sqrt{3}a^2$$

$$x_{12} = \frac{9}{14}a$$

$$y_{12} = -3\sqrt{3} \cdot \frac{9}{14}a + 2\sqrt{3}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{14}a^2$$

$P_{DBP} = \frac{1}{2} \cdot \left(2a \text{ wzrostek na, pole trójkąta z wierzchołkiem} \right)$
współrzędnych)

$$P_{DBP} = \frac{1}{2} \cdot \left((a - \frac{2}{3}a) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{14}a^2 - 0) - (0 - 0) \cdot (\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}a) \right)$$

$$P_{DBP} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{a^2\sqrt{3}}{14} \right| = \frac{a^2\sqrt{3}}{28}$$

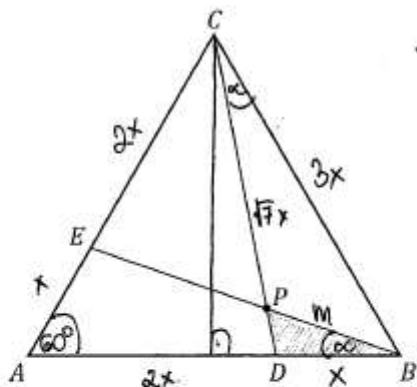
$$P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DBP}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{28}} = 7$$

//

Większość zdających nie poradziła sobie z rozwiązaniem zadania 8. Część z nich nie ustrzegła się błędów rachunkowych (przykład 34.), czy też merytorycznych (przykłady 35. i 36.), a jeszcze inni kończyli swój dowód po kilku przekształceniach, nie mając pomysłu na doprowadzenie go do końca (przykłady 37. oraz 38.) lub po prostu opuszczali rozwiązanie zadania.

Przykład 34.

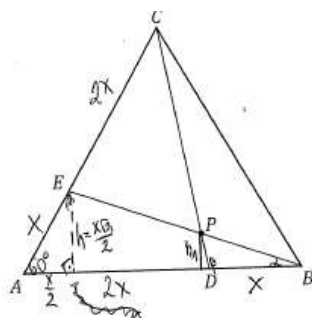


Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

$$\begin{aligned}
 P_{\triangle ABC} &= \frac{(3x)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}x^2}{4} \quad x > 0 \\
 P_{\triangle CDB} &= \frac{1}{2} P_{\triangle ADC} = \frac{1}{3} P_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4} \\
 |CD|^2 &= (3x)^2 + (2x)^2 - 2(3x)(2x) \cdot \cos 60^\circ \\
 |CD|^2 &= 9x^2 + 4x^2 - 12x^2 \cdot \frac{1}{2} \\
 |CD|^2 &= 4x^2 \\
 |CD| &= \sqrt{4}x \quad |CD| = |BE| \\
 x^2 &= (3x)^2 + (\sqrt{3}x)^2 - 2(3x)(\sqrt{3}x) \cdot \cos \alpha \\
 x^2 &= 9x^2 + 3x^2 - 6\sqrt{3}x^2 \cdot \cos \alpha \\
 -15x^2 &= -6\sqrt{3}x^2 \cos \alpha \\
 \frac{15x^2}{6\sqrt{3}x^2} &= \cos \alpha \\
 \frac{15\sqrt{3}}{6 \cdot 2} &= \cos \alpha \\
 \frac{5\sqrt{3}}{4} &= \cos \alpha \\
 \sin^2 \alpha &= 1 - \frac{25 \cdot 3}{196} = \frac{196}{196} - \frac{75}{196} = \frac{21}{196} \\
 \sin \alpha &= \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{196}} = \frac{\sqrt{21}}{14}
 \end{aligned}$$

[illegible]

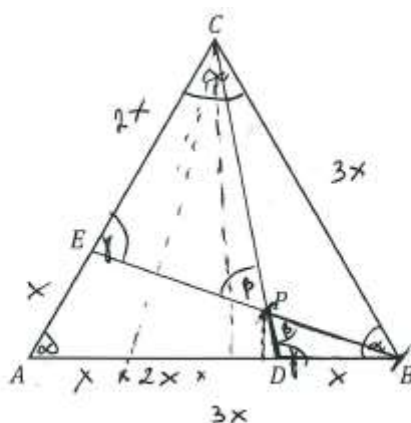
Przykład 35.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

$$\begin{aligned}
 P_{\Delta ABC} &= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2 \sqrt{3}}{4} \\
 \Delta BDP &\sim \Delta BEA \\
 h \text{ skali } k &= \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \\
 \frac{h_1}{h} &= \frac{1}{3} \rightarrow h_1 = \frac{h}{3} \\
 \frac{h_1}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} &= \frac{1}{3} \rightarrow h_1 = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{x\sqrt{3}}{6} \\
 P_{\Delta BDP} &= \frac{x \cdot h_1}{2} = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{24} \\
 \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta BDP}} &= \frac{\frac{9x^2 \sqrt{3}}{4}}{\frac{x^2 \sqrt{3}}{24}} = 24
 \end{aligned}$$

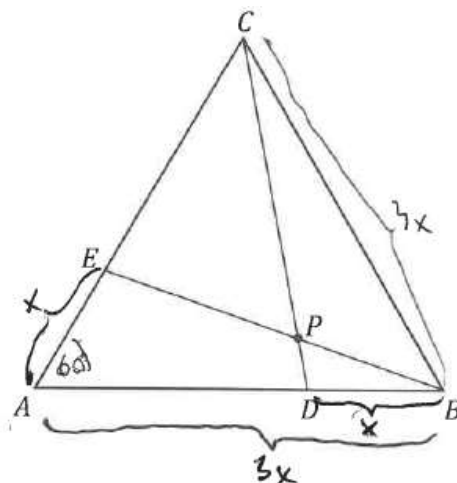
Przykład 36.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

Teza: $P_{DBP} = \frac{1}{21} P_{ABC}$ $P_{ABC} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$
 $\triangle EAB \sim \triangle DBC$ $h_{ABC} = \frac{3x\sqrt{3}}{2}$
 (b, h, b) $P_{DBC} = \frac{x \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$
 $P_{ABC} = P_{ADC} + P_{DBC}$ $P_{ADC} = \frac{2x \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{6x^2\sqrt{3}}{4}$
 $P_{EAB} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$ $P_{ABC} = P_{ADC} + P_{DBC} + P_{EAB}$
 $\triangle PDB \sim \triangle PEC$ $P_{CEB} = \frac{6x^2\sqrt{3}}{4}$
 (k, k, k) $\triangle CEB \sim \triangle ADB$
 $k = 2$ (b, k, b)
 $\triangle PKC \sim \triangle DBC$
 $P_{CEB} = 4 P_{PDB}$

Przykład 37.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

Teraz: $P_{\triangle ABC} = 21 \cdot P_{\triangle DBP}$

zAC: $|DB| = |AE| = x$

$|AB| = |BC| = |AC| = 3x$

Donoś: $|AD| = 2x = |EC|$

$P_{\triangle ABC} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$

$|EB|^2 = 9x^2 + x^2 - 6x^2 \cos 60^\circ = 10x^2 - 3x^2 = 7x^2$

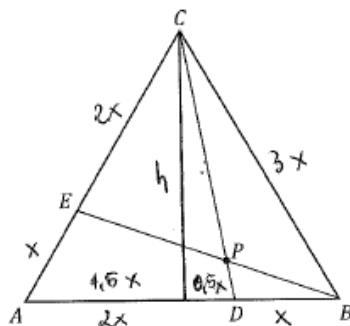
$|EB| = \sqrt{7}x$

$|CD|^2 = 9x^2 + 4x^2 - 12x^2 \cos 60^\circ = 13x^2 - 6x^2 = 7x^2$

$|CD| = \sqrt{7}x$

$\triangle ABE \cong \triangle CDB$ (klkl)

Przykład 38.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

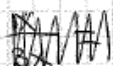
$$P_{\triangle ABC} = \frac{(3x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2 \sqrt{3}}{4} \quad x > 0$$

$$|BD| = |AE| = x$$

$$|AB| = 3x$$

$$\triangle AEB \sim \triangle DBP$$

na podst. cedy $k-k-k$



$$\frac{x\sqrt{7}}{3x} = \frac{x}{|PB|}$$

$$x\sqrt{7} = 3x \cdot |PB|$$

$$|PB| = \frac{\sqrt{7}}{3x}$$

$$\frac{28x^2}{4} = |CD|^2$$

$$|CD|^2 = 7x^2$$

$$|CD| = x\sqrt{7} = |EB|$$

$$\frac{x}{3x} = \frac{|PD|}{\frac{\sqrt{7}}{3x}}$$

$$3x \cdot |PD| = \frac{x\sqrt{7}}{3x}$$

$$3x \cdot |PD| = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$|PD| = \frac{\sqrt{7}}{9x}$$

$$P = x + \frac{\sqrt{7}}{9x} + \frac{\sqrt{7}}{3x}$$

$$\triangle DBC \cong \triangle AEB$$

na podst. c. b-b-b

a zatem

$$|EB| = |CD|$$

$$h = \frac{3x\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{3x\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = |CD|^2$$

$$\frac{27x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = |CD|^2$$

Duże trudności sprawiło zdającym (poza zadaniem na dowodzenie) rozwiązanie zadań 12. oraz 14. (poziomy wykonania tych zadań to – odpowiednio – 24% i 25%).

Zadanie 12. to zadanie sprawdzające wiadomości z obszaru *Użycie i tworzenie strategii*, w którego rozwiązaniu zdający mieli wykazać się umiejętnością rozwiązywania równań trygonometrycznych.

Jednym ze sposobów rozwiązania tego zadania było zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego argumentu i zapisanie równania w postaci iloczynowej, następnie zapisanie alternatywy odpowiednich równań i wyznaczenie rozwiązań każdego z nich w przedziale domkniętym $\langle 0, \pi \rangle$. Ilustracją tego sposobu rozwiązania jest przykład 39.

Przykład 39.

$$\begin{aligned}
 \cos 2x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) & x \in \langle 0; \pi \rangle \\
 \cos 2x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x & \sin x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos x \\
 \cos 2x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - (\frac{\pi}{2} - x) \cos x) \\
 \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x &= 0 \\
 \cos x (\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}) &= 0 \\
 (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) &= 0 \\
 (\cos x - \sin x) (\cos x + \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}) &= 0 \\
 \cos x - \sin x = 0 & \vee \cos x + \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\
 \cos x = \sin x & \vee \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \underline{x = \frac{\pi}{4}} & \\
 \sin x &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
 \cos x + \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 2 \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad | : \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 1 \quad | : 2 \\
 \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2} \\
 x - \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{3} \\
 x &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + 3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}
 \end{aligned}$$

Odpowiedź: $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{12}; \pi \right\}$

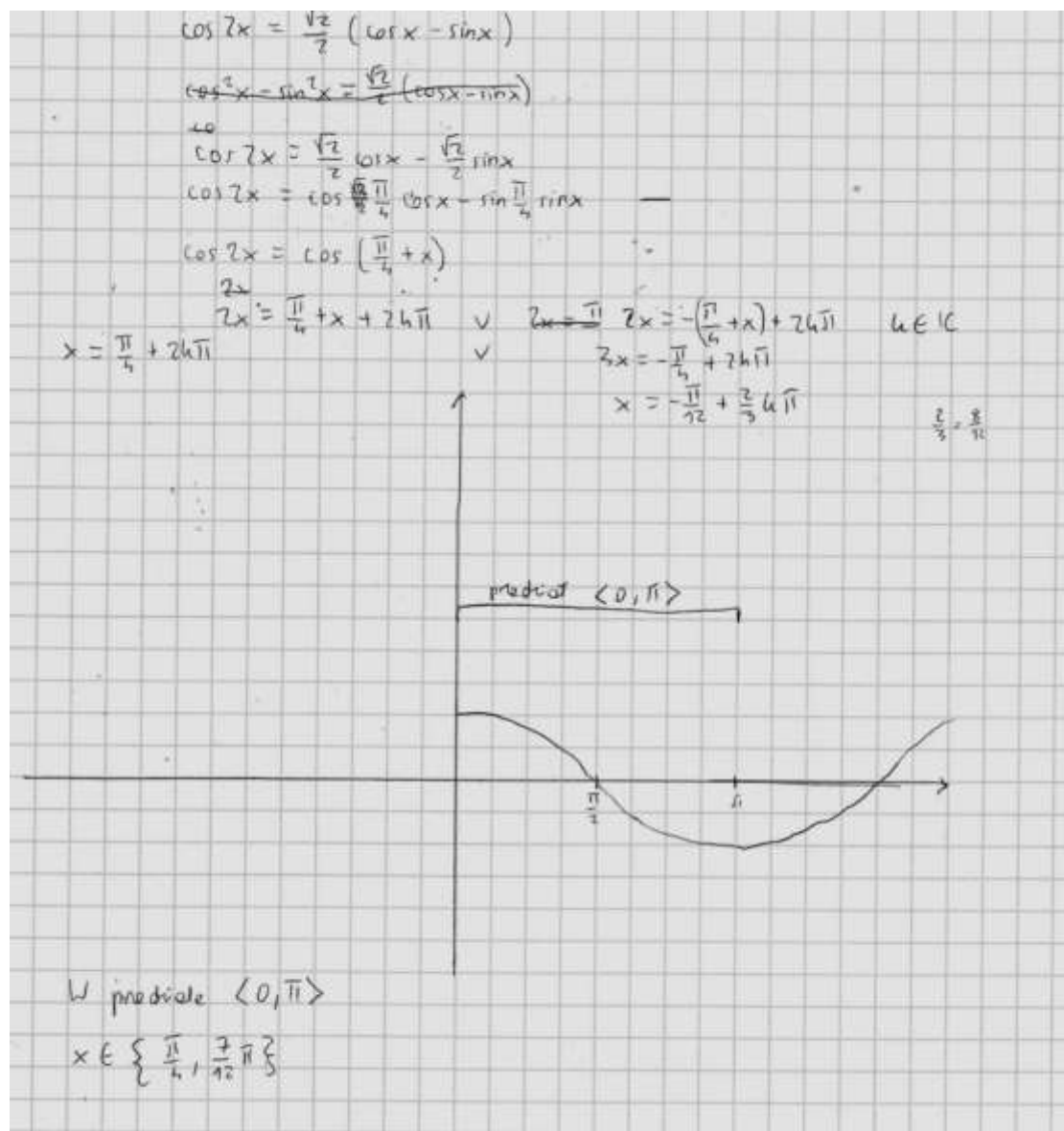
Inni zdający przekształcali prawą stronę równania, stosując wzór na cosinus sumy argumentów, następnie wzór na różnicę cosinusów, po czym przekształcali równanie do postaci iloczynowej i wyznaczali rozwiązania każdego z otrzymanych w alternatywie równań w przedziale domkniętym $\langle 0, \pi \rangle$ (przykład 40.).

Przykład 40.

$$\begin{aligned}
 x &\in \langle 0; \pi \rangle \\
 \cos 2x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \\
 \cos 2x &= \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \\
 \cos 2x &= \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \\
 \cos 2x - \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= 0 \\
 (-2) \cdot \sin \frac{2x - x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{2x + x + \frac{\pi}{4}}{2} &= 0 \\
 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) &= 0 \\
 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \quad \vee \quad \sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) &= 0 \\
 \frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 \text{Stąd tylko te } x \in \langle 0; \pi \rangle \text{ należy wziąć pod uwagę:} \\
 x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7}{12}\pi \right\}
 \end{aligned}$$

Kolejna grupa zdających zapisywała równanie w postaci równości cosinusów, wypisywała dwie serie rozwiązań i na koniec podawała rozwiązania równania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ (przykład 41.).

Przykład 41.



Wśród rozwiązań zdających nie brakowało takich, które zawierały błędy. Niemala część rozwiązujących zadanie dzieliła równanie przez jeden z czynników $(\cos x - \sin x)$ bez rozstrzygnięcia sytuacji, gdy $\cos x = \sin x$, pomijając w ten sposób jedno z rozwiązań (przykłady 42. oraz 43.).

Przykład 42.

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x - \sin^2 x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \\
 (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \quad | : (\cos x - \sin x) \\
 \cos x + \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad | ()^2 \\
 (\cos x + \sin x)^2 &= \frac{1}{2} \\
 \cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x &= \frac{1}{2} \\
 2\sin x \cos x + 1 &= \frac{1}{2} \\
 \sin 2x &= -\frac{1}{2} \\
 x &= \frac{7}{12}\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{12}\pi
 \end{aligned}$$

Przykład 43

$$\begin{aligned}
 \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
 \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \cos x + \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x &= \frac{2}{4} \\
 1 + \sin 2x &= \frac{2}{4} \\
 \sin 2x &= \frac{2}{4} - 1 \\
 \sin 2x &= -\frac{1}{2} \\
 2x &= \frac{7}{6}\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{11}{6}\pi \\
 x &= \frac{7}{12}\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{12}\pi
 \end{aligned}$$

Niektórzy ze zdających zapisywali równanie w postaci równości cosinusów i pomijali jedną serię rozwiązań (przykład 44.) lub jedno rozwiązanie (przykład 45.).

Przykład 44.

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \quad x \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x$$

$$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x$$

$$\cos 2x = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 2x - \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos - 2 \sin \frac{2x + x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{2x - x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \vee \quad \sin \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = 0 \quad x - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = -\frac{\pi}{12} \quad \text{OK}$$

poza przedziałem

Przykład 45.

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$$

$$\cos 2x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right)$$

$$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x$$

$$\cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + x$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} \right\}$$

Część zdających, rozwiązując jedno z otrzymanych równań, stosowała metodę analizy starożytnych – podnosiła obie strony równania $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ do kwadratu, lecz nie sprawdzała i nie odrzucała rozwiązań obcych (przykłady 46. i 47.).

Przykład 46.

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x - \sin^2 x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \\
 \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) &= 0 \\
 (\cos^2 x - \sin^2 x) \left(\cos x - \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= 0 \\
 \cos x - \sin x &= 0 \quad \vee \quad \cos x - \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\
 1) \quad \cos x - \sin x &= 0 \quad |(\cdot)^2 \\
 \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x &= 0 \\
 1 - 2 \cos x \sin x &= 0 \\
 1 - \sin 2x &= 0 \\
 \sin 2x &= 1 \\
 2x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\
 x &= \frac{\pi}{4} + k\pi \\
 2) \quad \cos x - \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad |(\cdot)^2 \\
 \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x &= \frac{2}{4} \\
 1 - 2 \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{2} &= 2 \sin x \cos x \\
 \sin 2x &= \frac{1}{2} \\
 2x &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\
 x &= \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \\
 x &\in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right\}
 \end{aligned}$$

Przykład 47.

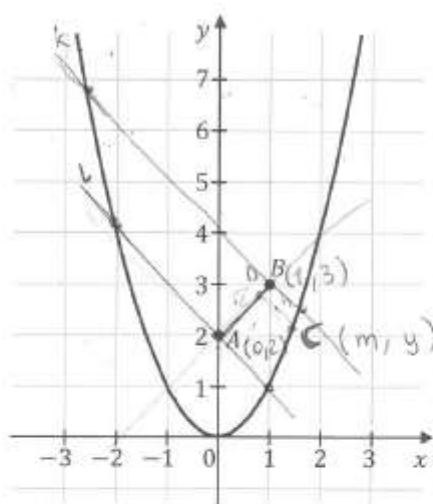
$$\begin{aligned}
 \cos 2x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \\
 \cos^2 x - \sin^2 x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \\
 (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \quad | : (\cos x - \sin x) \quad \text{!} \\
 \cos x + \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad |^2 \\
 (\cos x + \sin x)^2 &= \frac{1}{2} \\
 1 + 2 \cos x \sin x &= \frac{1}{2} \\
 2 \cos x \sin x &= -\frac{1}{2} \quad \sin 2x = -\frac{1}{2} \\
 2x &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\
 x &= -\frac{\pi}{12} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\
 x &\in \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right\}
 \end{aligned}$$

$x \in \langle 0, \pi \rangle$
 $\cos x - \sin x \neq 0$
 $\cos x \neq \sin x$
 $x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
 $x \neq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

Zadanie 14. sprawdzało wiadomości z obszaru *Modelowanie matematyczne* w części a) (w której zdający mieli wykazać się umiejętnością wyznaczania wzoru funkcji opisującej pole trójkąta, jeśli dane były współrzędne dwóch jego wierzchołków i podane równanie krzywej, na której leżał wierzchołek trzeci) i *Użycie i tworzenie strategii* w części b) (w której należało wyznaczyć wartości parametru m , tak aby trójkąt ten był ostrokątny).

W rozwiązaniu zadania 14. w części a) zdający musiał uzależnić współrzędne wierzchołka C oraz jego wysokość opuszczoną z tego wierzchołka w zależności od zmiennej m i zapisać wzór na pole trójkąta ABC w zależności od tej zmiennej, zaś w części b) wyznaczyć wartości parametru m , tak aby trójkąt ten był ostrokątny. Zdający mógł rozważyć położenie prostych prostopadłych do prostej AB przechodzących przez punkty A i B , zauważając, że kąt przy wierzchołku C jest ostry (przykład 48.) lub skorzystać z twierdzenia cosinusów (przykład 49.).

Przykład 48.



aby był trójkąt to punkty A, B, C nie mogą być współliniowe,
a więc C nie może leżeć na prostej AB

$AB: y = ax + b$
 $2 = b$
 $3 = a + 2$
 $a = 1$

$y = x + 2$
 $x + 2 \neq x^2$
 $x^2 - x - 2 \neq 0$
 ~~$(x-2)(x+1) \neq 0$~~

$(x-2)(x+1) \neq 0$
 $x \neq 2$ i $x \neq -1$
 $m \neq 2$ i $m \neq -1$

$y = m^2$
 $AB = \sqrt{2}$
 $P = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$

h - wysokość $\triangle ABC$, czyli odległość punktu C od AB

$$CD = \frac{|-m + y - 2|}{\sqrt{2}}$$

$$y = m^2$$

$$CD = \frac{|-m + m^2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|m^2 - m - 2|}{\sqrt{2}}$$

$$a) P_{(m)} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{|m^2 - m - 2|}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{|m^2 - m - 2|}{2}$$

aby $\triangle ABC$ był prostokątny to punkt C musi się znajdować na ~~odcinku~~ fragmentach paraboli między prostymi k i l ($k, l \perp AB$ i k przechodzi przez punkt B, a l przechodzi przez punkt A)

$k: y = ax + b \quad a = -1$
 $3 = -1 + b \quad k: y = -x + 4$
 $b = 4$

$l: y = -x + b \quad a = -1$
 $2 = b \quad l: y = -x + 2$

$k: y = -m + 4$
 $y = m^2$
 $m^2 + m - 4 = 0$
 $\Delta = 1 + 16 = 17$
 $m_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$
 $m_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

$l: y = -m + 2$
 $y = m^2$
 $m^2 + m - 2 = 0$
 $(m + 2)(m - 1) = 0$
 $m = -2 \vee m = 1$

b) $m \in \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, -2 \right) \cup \left(1, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$

Przykład 49.

a)
$$P = \sqrt{\frac{(AB+BC+AC)}{2} \left(\frac{AB+BC-AC}{2} \right) \left(\frac{AB+AC-BC}{2} \right) \left(\frac{BC+AC-AB}{2} \right)}$$

$$|AB| = \sqrt{(0-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$$

$$|AC| = \sqrt{(0-m)^2 + (2-m)^2} = \sqrt{m^4 - 3m^2 + 4}$$

$$|BC| = \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10}$$

$$P_m = \sqrt{\frac{(m^4 - 3m^2 + 4) + (m^4 - 5m^2 - 2m + 10) + \sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10} - \sqrt{m^4 - 3m^2 + 4}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{m^4 - 3m^2 + 4} - \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10} + \sqrt{m^4 - 3m^2 + 4} - \sqrt{2}}{2} \right)}$$

b)
$$(\sqrt{2})^2 + (m^4 - 3m^2 + 4)^2 > (m^4 - 5m^2 - 2m + 10)^2$$

$$2 + m^4 - 3m^2 + 4 > m^4 - 5m^2 - 2m + 10$$

$$2^\circ 2m^2 + 2m - 4 > 0$$

$$(\sqrt{2})^2 + (m^4 - 5m^2 - 2m + 10)^2 > (m^4 - 3m^2 + 4)^2$$

$$2 + m^4 - 5m^2 - 2m + 10 > m^4 - 3m^2 + 4$$

$$2^\circ 0 > 2m^2 + 2m - 8$$

$$(\sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10})^2 + (\sqrt{m^4 - 3m^2 + 4})^2 > (\sqrt{2})^2$$

$$m^4 - 5m^2 - 2m + 10 + m^4 - 3m^2 + 4 > 2$$

$$3^\circ 2m^4 - 8m^2 - 2m + 12 > 0$$

$$1^\circ 2m^2 + 2m - 4 > 0$$

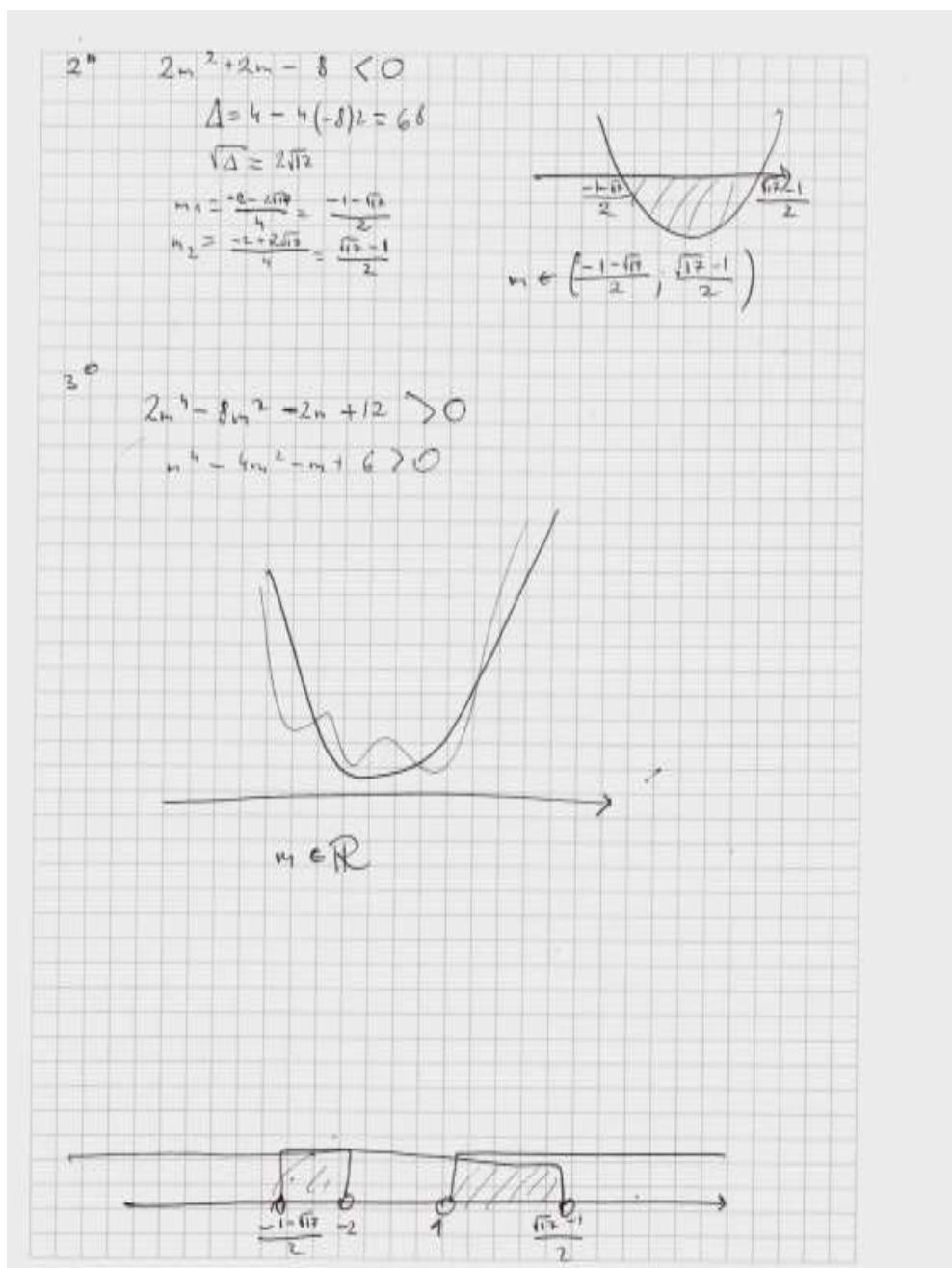
$$\Delta = 4 - 4(-4)2 = 36$$

$$m_1 = \frac{-2 \pm 6}{2} = 1$$

$$m_2 = \frac{-2 \pm 6}{2} = -2$$



$$m \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$$



Odpowiedź: $m \in \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, -2 \right) \cup \left(1, \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)$

Zdający często nie podejmowali próby rozwiązania zadania 14., bądź ograniczali się do rozwiązania podpunktu pierwszego (przykład 50.), część jednak nawet to czyniła błędnie (przykład 51.).

Przykład 50.

$A(0,1)$
 $B(1,3)$
 $C(m,m^2)$
 $P_{ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$
 $a) P = \frac{1}{2} |(1-0)(m^2-1) - (3-1)(m-0)| =$
 $= \frac{1}{2} |m^2 - 2 - m| = \frac{1}{2} |m^2 - m - 2|$

Przykład 51.

a) $C(m, m^2)$

$|AB| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|AC| = \sqrt{m^2 + (m^2 - 2)^2} = \sqrt{m^2 + m^4 - 4m^2 + 4} = \sqrt{m^4 - 3m^2 + 4}$

$P_{rAB}: y = ax + b \quad A(0, 2) \quad B(1, 3)$

$2 = b \quad y = ax + 2 \quad 3 = a + 2$

$a = 1$

$y = x + 2 \quad x - y + 2 = 0 \quad C(m, m^2)$

$P_{ABC} = |AB| \cdot h$

$h = \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{2}}$

$f(m) = \sqrt{2} \cdot \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{2}} = |m - m^2 + 2|$

W rozwiązaniach zdający nie ustrzegli się błędów rachunkowych (przykład 52., przykład 53.), a często rozwiązania te nie były pełne (przykład 54.).

Przykład 52.

$c(m, m^2)$
 $|AB| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $|AC| = \sqrt{(m-0)^2 + (m^2-2)^2} = \sqrt{m^2 + m^4 - 4m^2 + 4} = \sqrt{m^4 - 2m^2 + 4}$
 ~~$|AB|$~~
 $|BC| = \sqrt{(m-1)^2 + (m^2-3)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 1 + m^4 - 6m^2 + 9}$
 $= \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10}$
 $p = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{m^4 - 2m^2 + 4}} + \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10}}{2}$

$$p(m) = \sqrt{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{m^4 - 2m^2 + 4}} + \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{m^4 - 2m^2 + 4} + \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10} - \sqrt{2}}{2} \right)}$$

$$\cdot \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10}} - \sqrt{m^4 - 2m^2 + 4}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{m^4 - 2m^2 + 4}} - \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10}}{2} \right)$$

 Translat before astrology:
 $|AB|^2 < |AC|^2 + |BC|^2$
 $2 < m^4 - 2m^2 + 4 + m^4 - 5m^2 - 2m + 10$
 $2 < 2m^4 - 7m^2 - 2m + 14$
 $2m^4 - 7m^2 - 2m + 12 > 0$
 $|AC|^2 < |AB|^2 + |BC|^2$
 $m^4 - 2m^2 + 4 < 2 + m^4 - 5m^2 - 2m + 10$
 $3m^2 + 2m - 8 < 0$

$$\Delta = 4 + 12 \cdot 8$$

$$m_1 = \frac{-2 - 10}{6} = -2$$

$$m_2 = \frac{-2 + 10}{6} = \frac{4}{3}$$

$$m \in (-2; \frac{4}{3})$$

 $|BC|^2 < |AB|^2 + |AC|^2$
 $m^4 - 5m^2 - 2m + 10 < 2 + m^4 - 2m^2 + 4$
 $-3m^2 - 2m + 4 < 0$

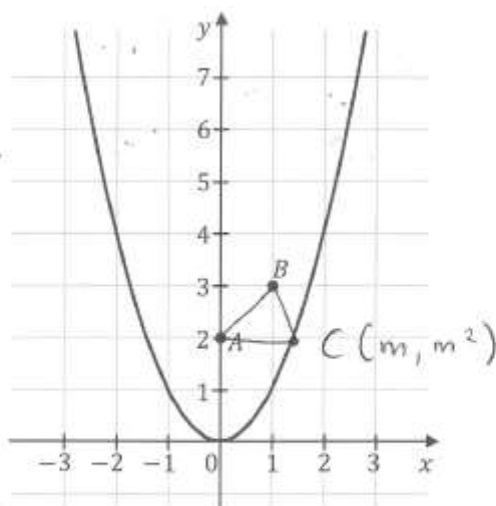
$$\Delta = 4 + 12 \cdot 4 = 52$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{13}$$

$$m_1 = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{6} = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}$$

$$m_2 = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{6} = \frac{1 + \sqrt{13}}{3}$$

Przykład 53.



$$a) m \in \mathbb{R}$$

$$\vec{AB} = [1, 1]$$

$$\vec{AC} = [m, m^2 - 2]$$

$$P(m) = \frac{1}{2} |m^2 - 2 - m| = \frac{1}{2} |m^2 - m - 2|$$

$$b) \vec{BC} = [m - 1, m^2 - 3]$$

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{(m-1)^2 + (m^2-3)^2} = \\ &= \sqrt{m^2 - 2m + 1 + m^4 - 6m^2 + 9} = \\ &= \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10} \end{aligned}$$

$$|A| = \sqrt{m^2 + (m^2 - 2)^2} = \sqrt{m^2 + m^4 - 4m^2 + 4} = \sqrt{m^4 - 3m^2 + 4}$$

$$|B| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{1} \quad m^4 - 5m^2 - 2m + 10 < m^4 - 3m^2 + 4 + 2$$

$$m^4 - 5m^2 - 2m + 10 < m^4 - 3m^2 + 6$$

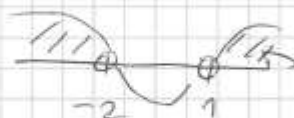
$$-2m^2 - 2m + 4 < 0 \quad |: (-2)$$

$$m^2 + m - 2 > 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$m_1 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$



$$m_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

$$\textcircled{2} \quad m^4 - 3m^2 + 4 < m^4 - 5m^2 - 2m + 10 + 2$$

$$m^4 - 3m^2 + 4 < m^4 - 5m^2 - 2m + 12$$

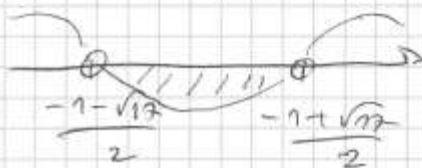
$$2m^2 + 2m - 8 < 0 \quad |: 2$$

$$m^2 + m - 4 < 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-4) = 1 + 16 = 17$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$$

$$m_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$



$$m_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\textcircled{3} \quad 2 < m^4 - 5m^2 - 2m + 10 + m^4 - 3m^2 + 4$$

$$2 < 2m^4 - 8m^2 - 2m + 14$$

$$2m^4 - 8m^2 - 2m + 12 > 0 \quad |:2$$

$$m^4 - 4m^2 - m + 6 > 0$$

$$W(m)$$

$$W(-1) = 4$$

$$W(0) = 6$$

$$W(1) = 2$$

$$W(2) = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} W(-1) = 4 \\ W(0) = 6 \\ W(1) = 2 \\ W(2) = 4 \end{array} \right\} W(m) > 0$$

~~Wniosek~~

Poszukamy takiego m , dla którego P jest najmniejsze, żeby sprawdzić, czy przewidywanie OAR może być tylko ostrokatny.

$$P(m) = \frac{1}{2} |m^2 - m - 2| \rightarrow \min$$

$$D_1 = 2$$

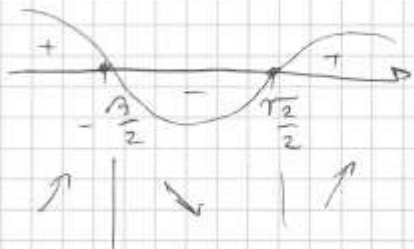
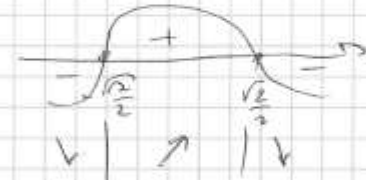
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \quad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$m_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$m_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

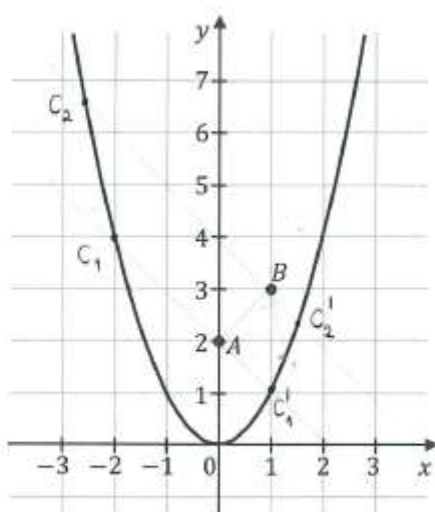
$$P(m) = \frac{1}{2} | (m+1)(m-2) |$$



$P(m) = \frac{1}{2}(m^2 - m - 2)$
 $P_1(m) = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m - 1$ dla $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
 $P_2(m) = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 1$ dla $m \in (-1, 2)$
 $P_1'(m) = m^2 - \frac{1}{2}$ $P_1'(m) = 0$ $m^2 = \frac{1}{2}$
 $P_2'(m) = -m^2 + \frac{1}{2}$ $P_2'(m) = 0$ $m^2 = \frac{1}{2}$
 $|m| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $|m| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\vee$ $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $P_1'(m) > 0$

 najmniejsza wartość dla
 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $W(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{16} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 =$
 $= \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 =$
 $= \frac{1}{2} - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 = \frac{5 - \sqrt{2}}{2}$
 $P_2'(m) > 0$

 najmniejsza wartość
 dla $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $W(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{9}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 =$
 $= \frac{9 + \sqrt{2}}{2}$
 $\bigwedge_{m \in \mathbb{R}} W(m) > 0 \Rightarrow \textcircled{3} m \in \mathbb{R}$
 $\textcircled{1} \vee \textcircled{2} \vee \textcircled{3} m \in \mathbb{R}$

Odpowiedź: ~~nie ma~~ a) $P(u) = \frac{1}{2}|m^2 - m - 2|$ b) $m \in \mathbb{R}$

Przykład 54.



$$\text{dane } A(0, 2) \quad B(1, 3) \quad C(m, m^2)$$

$$a) f(m) = P_{ABC}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |(1-0)(m^2-2) - (3-2)(m-0)| =$$

$$= \frac{1}{2} |m^2 - 2 - m| = \frac{1}{2} |m^2 - m - 2|$$

$$f(m) = \frac{1}{2} |m^2 - m - 2|$$

$$b) a = |AB| = \sqrt{(1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$b = |BC| = \sqrt{(m-1)^2 + (m^2-3)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 1 + m^4 - 6m^2 + 9} =$$

$$= \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10} = \sqrt{m^2(m^2 - 5) - 2m + 10}$$

$$c = |AC| = \sqrt{(m-0)^2 + (m^2-2)^2} = \sqrt{m^2 + m^4 - 4m^2 + 4} = \sqrt{m^4 - 3m^2 + 4}$$

prosta AB:

$$a_{AB} = \frac{3-2}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

prosta $\perp$ do AB:

$$a = -1$$

1) i przechodzące przez pkt A: (0,2)

$$y_1 = -x + b_1$$

$$2 = b_1$$

$$y_1 = -x + 2$$

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$x^2 = -x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2 \quad \vee \quad x = +1$$

$$A(-2, 4) \quad \vee \quad A'(1, 1)$$

$$m \in \left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}, 1 \right)$$

$$C_1(-2; (-2)^2) \vee C_1'(1, 1)$$

Ogólnie, stąd

$$m \in \left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}, -2 \right) \vee \left(1, -\frac{1+\sqrt{17}}{2} \right)$$

2) i przechodzące przez pkt B: (1,3)

$$y_2 = -x + b_2$$

$$3 = -1 + b_2 \Rightarrow b_2 = 4$$

$$y_2 = -x + 4$$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$x^2 = -x + 4$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-4) = 1 + 16 = 17$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad C_1' \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; m^2 \right)$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \quad C_2' \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; m^2 \right)$$

$$C_2' \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)^2 \right)$$

$$C_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \right)^2 \right)$$

Analiza zadań wymagających modelowania matematycznego

Modelowanie matematyczne to umiejętność opisywania w języku matematyki rzeczywistej sytuacji poprzez stworzenie/dobranie odpowiednich struktur i obiektów matematycznych wraz określeniem zależności/relacji między nimi. Stworzony model może mieć postać wzoru, równania, układu równań, funkcji, algorytmu, przestrzeni probabilistycznej itp., a ponadto powinien uwzględnić jedynie te aspekty rzeczywistej sytuacji, które wiążą się z postawionym problemem.

Na tegorocznym egzaminie na poziomie podstawowym przedmiotem rozważań w zadaniu 31. (poziom wykonania 40%) było wyznaczenie wzoru funkcji liniowej na podstawie informacji o tej funkcji. Zadanie to, oprócz dowodu, stanowiło poważne wyzwanie dla wielu zdających.

Aby poprawnie wyznaczyć wzór funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ należało poprawnie zinterpretować informację, że funkcja przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0 oraz właściwie zinterpretować równanie z treści zadania $f(4) - f(2) = 6$.

Znaczna część zdających, którzy poprawnie rozwiązyali to zadanie, najpierw korzystała z własności funkcji liniowej, że punkt przecięcia prostej będącej wykresem tej funkcji z osią OY ma współrzędne $(0, b)$. Na podstawie tego wnioskowali, że $b = 2$ i $f(x) = ax + 2$. Kolejnym etapem było wyznaczenie wartości funkcji dla argumentów 4 i 2, czyli $f(4) = 4a + 2$ i $f(2) = 2a + 2$ oraz ich podstawienie do danego równania $f(4) - f(2) = 6$. I w końcu, otrzymaną po rozwiązaniu równania $4a + 2 - (2a + 2) = 6$ wartość współczynnika kierunkowego $a = 3$, podstawić do wzoru funkcji f i zapisać $f(x) = 3x + 2$ (przykład 55.).

Przykład 55.

Handwritten solution on grid paper:

$$\begin{aligned}
 & \cancel{f(0) = 2} \\
 & f(4) = 4a + 2 \\
 & f(2) = 2a + 2 \\
 & (4a + 2) - (2a + 2) = 6 \\
 & 4a + 2 - 2a - 2 = 6 \\
 & \cancel{2a} \quad \cancel{2a} \quad 2a = 6 \\
 & a = 3 \\
 & \underline{f(x) = 3x + 2}
 \end{aligned}$$

Liczna grupa zdających najpierw poprawnie wyznaczała wartości funkcji liniowej dla argumentów 4 i 2: $f(4) = 4a + b$ oraz $f(2) = 2a + b$ i wyznaczone wartości funkcji podstawiali do danego w treści zadania równania $f(4) - f(2) = 6$. Po rozwiązaniu tego równania z niewiadomą a otrzymywali wartość współczynnika kierunkowego $a = 3$ i zapisywali $f(x) = 3x + b$. Następnie poprawnie interpretowali informację, że funkcja f przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0 i zapisywali równanie $2 = 3 \cdot 0 + b$. Po rozwiązaniu otrzymywali $b = 2$ i zapisywali poprawny wzór funkcji liniowej $f(x) = 3x + 2$ (przykład 56.).

Przykład 56.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax + b \\
 f(4) &= a \cdot 4 + b = 4a + b \\
 f(2) &= a \cdot 2 + b = 2a + b \\
 f(4) - f(2) &= 6 \\
 4a + b - (2a + b) &= 6 \\
 4a + b - 2a - b &= 6 \\
 2a &= 6 \\
 a &= 3 \\
 f(0) &= 2 \\
 a \cdot 0 + b &= 2 \\
 b &= 2 \\
 f(x) &= 3x + 2
 \end{aligned}$$

Niektórzy zdający poprawnie zinterpretowali obie informacje podane w treści zadania i obliczali współczynniki a i b niezależnie (przykład 57.).

Przykład 57.

$$\begin{aligned}
 y &= ax + b \text{ — równanie ogólne funkcji liniowej} \\
 \text{Dane:} \\
 f(0) &= 2, \quad f(4) - f(2) = 6 \\
 \text{Rozwiązanie:} \\
 2 &= a \cdot 0 + b \Rightarrow \underline{b = 2} \\
 4a + b - (2a + b) &= 6 \\
 4a + b - 2a - b &= 6 \\
 2a &= 6 \quad | :2 \\
 \underline{a} &= \underline{3} \\
 a &= 3, \quad b = 2, \text{ zatem równanie funkcji } f \\
 &\text{dane jest wzorem:} \\
 \underline{\underline{y = 3x + 2}}
 \end{aligned}$$

Część zdających poprawnie interpretowała informację, że funkcja f przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0, a następnie właściwie zinterpretowała równanie $f(4) - f(2) = 6$ i obliczyła współczynnik kierunkowy a jako iloraz różnicowy $a = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$, uzasadniając obliczenie a własnością funkcji liniowej o stałym stosunku przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu (przykład 58.).

Przykład 58.

$f(0) = 2 \Rightarrow b = 2$
 $f(4) - f(2) = 6 \Rightarrow$ różnica argumentów 4 i 2
 2 polecające wartości 6 i 2
 $\Rightarrow a = \frac{6}{2} = 3$
 $y = 3x + 2$

Wśród zdających byli i tacy, którzy poprawnie obliczyli współczynnik b , natomiast współczynnik kierunkowy a wyznaczyli metodą prób i błędów, a wskazaną wartość sprawdzili z warunkami zadania. Takie rozwiązanie prezentujemy w przykładzie 59.

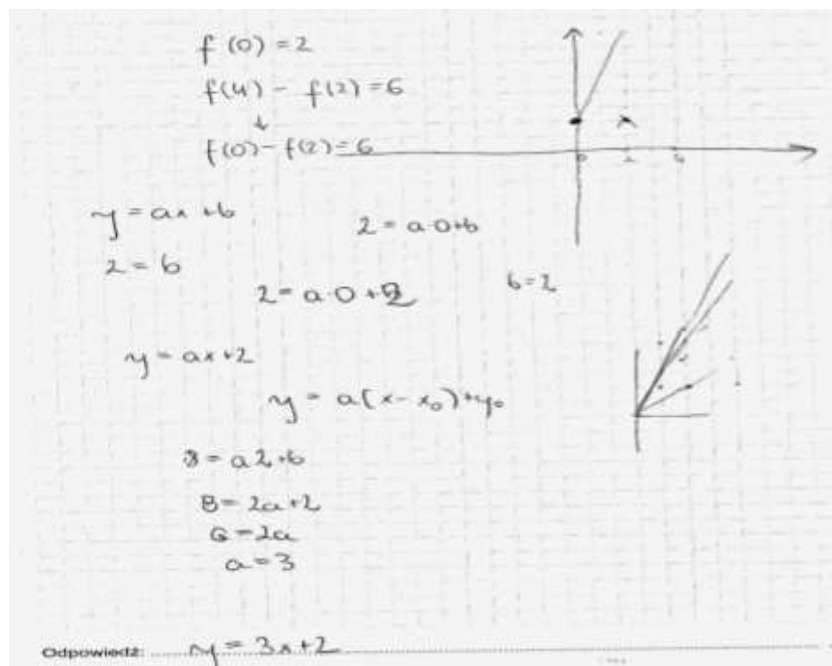
Przykład 59.

$f(0) = 2$
 $f(4) - f(2) = 6$
 $Ax + Bx + C = 0$
 $0x + 2x + C = 2$
 $y = ax + b$
 $f(0) = 0x + 2$
 $f(2) = 2x + 2$
 $f(4) = 4x + 2$
 $4x + 2 - 2x - 2 = 6$
 $2x = 6$
 $x = 3$
 $f(x) = 3x + 2$

$b = 2$
~~albo~~ albo $ax + b = 2$
 albo $a = 1$ $x + 2$
 $f(4) - f(2) = 6 - 4 \neq 6$
 dla $a = 2$ $2x + 2$
 $f(4) - f(2) = 10 - 6 \neq 6$
 dla $a = 3$ $3x + 2$
 $f(4) - f(2) = 14 - 8 = 6$

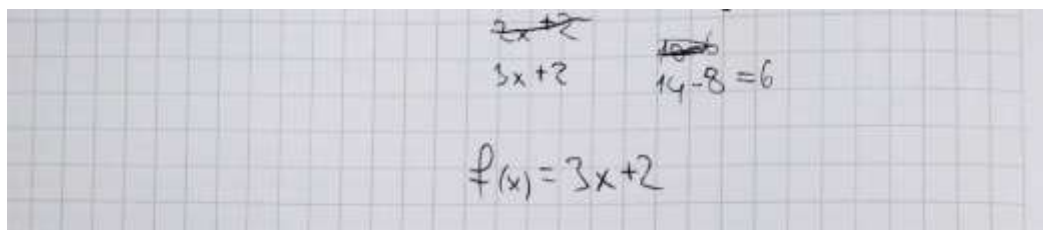
Część zdających, w modelowaniu wykorzystała własność funkcji liniowej, że stosunek przyrostu wartości do przyrostu argumentu jest stały. Ci zdający właściwie zinterpretowali dane w treści zadania równanie $f(4) - f(2) = 6$ i poprawnie wnioskowali, że każdy przyrost argumentu o dwa implikować będzie przyrost wartości funkcji o sześć. Następnie sporządzali ilustrację graficzną do zadania – rysowali układ współrzędnych, kreślili prostą i, korzystając z rysunku, podejmowali próbę dopasowania współczynników a i b wzoru funkcji f , po czym sprawdzali, czy punkty prostej spełniają zależność $f(4) - f(2) = 6$ (przykład 60.).

Przykład 60.



Niektórzy zdający podawali poprawny wzór funkcji od razu – bez żadnych obliczeń (przykład 61.). Jednak za takie rozwiązanie zdający mógł otrzymać tylko 1 punkt.

Przykład 61.



Zagadnienia wymagające przeprowadzenia modelowania w kilku etapach są istotnym wyzwaniem dla zdających. Nierzadko, pomimo bezbłędnego wykonania pierwszego etapu rozwiązania, zdający nie doprowadzali poprawnie modelowania do końca.

Jakie są zatem prawdopodobne przyczyny niskiego wyniku w zadaniu, które nie należało do zadań szczególnie opuszczanych, jak zadanie typu „wykaż, że”, a w podanych w treści zadania informacjach wyraźnie wskazano na wydzielone obiekty i relacje między nimi, z czego jasno wynikała droga postępowania? Oto możliwe odpowiedzi.

Największą trudność dla zdających stanowiło zinterpretowanie danej w treści zadania informacji, że funkcja przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0.

Liczna grupa zdających myliła argument funkcji z jej wartością i błędnie zapisywała tę informację jako $f(2) = 0$, co świadczy o braku znajomości podstawowych pojęć związanych z funkcją (przykład 62.).

Przykład 62.

$$\begin{aligned}
 f(2) &= 0 \\
 f(4) - f(2) &= 6 \\
 f(4) - 0 &= 6 \\
 f(4) &= 6 \\
 f(x) &= ax + b \\
 \begin{cases} 0 = 2a + b \\ 6 = 4a + b \end{cases} \\
 6 &= 2a \\
 a &= 3 \\
 -b &= 2a \\
 b &= -6 \\
 f(x) &= 3x - 6
 \end{aligned}$$

Z dalszego rozwiązania zdającego wynika, że rozumie zapis $f(4)$ i $f(2)$, ponieważ właściwie zinterpretował dane w treści zadania równanie $f(4) - f(2) = 6$.

Niemalą część maturzystów, pomimo zrozumienia istoty zagadnienia, znajomości i rozumienia pojęcia funkcji liniowej, zapisania poprawnego równania z niewiadomą a , popełniony błąd rachunkowy w jego rozwiązaniu uniemożliwił otrzymanie poprawnego wzoru funkcji f .

W wielu przypadkach, w których zdający prawidłowo wyznaczyli współczynnik b , o braku poprawności wyznaczenia wzoru funkcji liniowej decydowały błędy w dalszym etapie rozwiązania zadania. Typowe błędy popełniane przez maturzystów ilustrują przykłady 63. i 64. Wprawdzie w przedstawionych poniżej rozwiązaniach wyznaczono poprawnie współczynnik b , lecz potem zapisano niepoprawne równanie z niewiadomą a , co uniemożliwiło uzyskanie poprawnej wartości współczynnika kierunkowego.

Przykładem 63. ilustrujemy bardzo częsty błąd zdających polegający na pominięciu nawiasu w zapisie równania z niewiadomą a .

Przykład 63.

$$f(0) = 2$$

$$f(4) - f(2) = 6$$

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(4) - f(2) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = b \\ 4a + 2 - 2a + 2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ 2a = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$y = x + 2$$

W przykładzie 64. zdający nie wyznaczył poprawnej wartości funkcji f dla argumentu 2 i w konsekwencji otrzymał błędną wartość współczynnika kierunkowego a .

Przykład 64.

$$y = ax + b$$

$$2 = 0a + b$$

$$b = 2$$

$$f(4) - f(2) = 6$$

$$4a + 2 - 2 = 6$$

$$4a = 6$$

$$a = \frac{6}{4}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

Część zdających, pomimo obliczenia poprawnej wartości współczynnika b oraz właściwej interpretacji równania danego w treści zadania, zapisywała błędne równanie z niewiadomą a , przedstawiając odjemną i odjemnik (przykład 65.).

Przykład 65.

Handwritten student solution for Example 65. The student starts with $f(0)=2$ and $f(4)-f(2)=6$. They assume $f(x)=ax+b$. They incorrectly calculate $f(0)=0+b$ leading to $b=2$. They then incorrectly calculate $f(4)=4a+2$ and $f(2)=2a+2$, leading to $2a+2-4a-2=6$, which simplifies to $-2a=6$ and $a=-3$. The final answer is $f(x)=-3x+2$. There are several crossed-out lines and corrections throughout the work.

Część zdających poprawnie wyznaczyła wartość współczynnika b , ale błędnie zinterpretowała równanie $f(4) - f(2) = 6$, ponieważ sformułowała błędny wniosek, że $f(4) = 8$ i $f(2) = 2$ i na tym błędnym wniosku oparła dalsze rozwiązanie. Wśród zdających byli i tacy, którzy nie potrafili zinterpretować danego w treści zadania równania i tylko zapisali $f(0) = 2$, więc $b = 2$ i na tym kończyli rozwiązanie.

Duża grupa zdających, którzy właściwie zinterpretowali równanie z treści zadania $f(4) - f(2) = 6$ i rozpoczynali rozwiązywanie zadania od obliczenia współczynnika kierunkowego a funkcji liniowej f i otrzymali $a = 3$, popełniała błędy w obliczeniu współczynnika b . Przykładem 66. ilustrujemy takie błędne rozwiązanie.

Przykład 66.

Handwritten student solution for Example 66. The student starts with $f(0)=2$ and $f(4)-f(2)=6$. They assume $y=ax+b$. They incorrectly calculate $f(0)=0+b$ leading to $b=6$. They then incorrectly calculate $f(4)=4a+6$ and $f(2)=2a+6$, leading to $2a+6-4a-6=6$, which simplifies to $-2a=6$ and $a=-3$. The final answer is $f(x)=-3x+6$. There are several crossed-out lines and corrections throughout the work.

Niektórzy spośród zdających, którzy właściwie zinterpretowali dane równanie i zapisali poprawne równanie z niewiadomą a , popełniali błąd rachunkowy w jego rozwiązaniu. Następnie błędnie interpretowali informację, że funkcja f przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0 i zapisywali niepoprawne równanie $0 = 2a + b$ (przykład 67.).

Przykład 67.

$f(x) = ax + b$
 $f(4) - f(2) = 6$
 $f(4) = 4a + b$
 $f(2) = 2a + b$
 $f(4) - f(2) = 6$
 $(4a + b) - (2a + b) = 6$
 $2a = 6$
 $a = 3$
 $f(0) = 2$
 $0 = 2a + b$
 $0 = 2 \cdot 3 + b$
 $0 = 6 + b$
 $b = -6$
 $f(x) = 3x - 6$
 Odpowiedź: $y = 3x - 6$

Wśród rozwiązań były również takie, w których zdający właściwie zinterpretowali dane równanie, zapisali poprawne równanie z niewiadomą a , poprawnie zinterpretowali informację, że funkcja f przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0, ale popełniali błąd rachunkowy w obliczeniu iloczynu a oraz 0 i zapisywali błędne równanie $2 = a + b$ (przykład 68.).

Przykład 68.

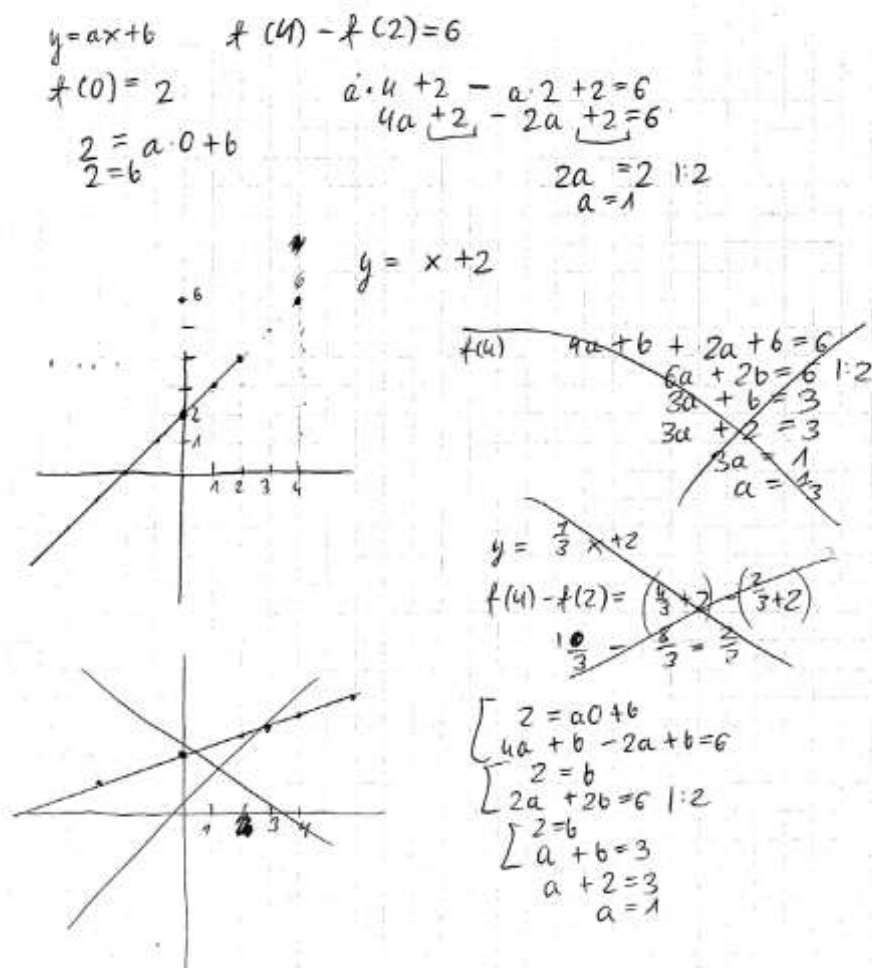
$f(0) = 2$
 $f(4) - f(2) = 6$
 $y = ax + b$
 $2 = a \cdot 0 + b$
 $b = 2$
 $f(4) - f(2) = 6$
 $(4a + b) - (2a + b) = 6$
 $2a = 6$
 $a = 3$
 $f(x) = 3x + 2$
 Odpowiedź: $y = 3x + 2$

Niektórzy maturzyści w procesie konstrukcji modelu matematycznego danej sytuacji, przeprowadzali jej badanie, a następnie dokonywali wydzielenia obiektów i relacji między nimi, zapisywali dostrzeżone związki i zależności, ale nie potrafili ich odpowiednio połączyć, by osiągnąć choćby niewielki postęp na drodze do rozwiązania zadania. Przykład 69. stanowi takie właśnie rozwiązanie. Zdający poprawnie zinterpretował informację, że funkcja przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0, ale nie wywnioskował z tego, że $b = 2$, obliczył wartości funkcji dla argumentów 4 i 2, ale nie zapisał poprawnego równania z niewiadomą a .

Przykład 69.

$$\begin{array}{lcl}
 f(0) = 2 & & f(4) - f(2) = 6 \\
 f(x) = ax + b & & 4a + b - 2a + b = 6 \\
 f(4) = 4a + b & & 2a + 2b = 6 \quad | -2b \\
 f(2) = 2a + b & & 2a = 6 - 2b \quad | :2 \\
 & & a = \frac{6 - 2b}{2} \\
 2 \cdot \frac{6 - 2b}{2} + b - 1 \cdot \frac{6 - 2b}{2} + b = 6 \\
 2(6 - 2b) + b - 1(6 - 2b) + b = 6 \\
 12 - 4b + b - 6 + 2b + b = 6 \\
 0 = 0
 \end{array}$$

Inni zdający nie potrafili skorygować własnego rozwiązania pomimo refleksji nad sprzecznością między otrzymanym wynikiem a treścią zadania. Takie rozwiązania ilustrujemy przykładem 70., w którym zdający sporządził ilustrację graficzną do otrzymanego wyniku i zauważył sprzeczność, że dla otrzymanego współczynnika kierunkowego a , nie będzie spełniony warunek $f(4) - f(2) = 6$. Podjął zatem ponownie próbę rozwiązania zadania, ale nie był świadomy, że błędnie zapisał równanie z niewiadomą a .

Przykład 70.

Przykładem 71. ilustrujemy nieliczne rozwiązania, które świadczą o nieznajomości pojęcia funkcji liniowej.

Przykład 71.

Handwritten mathematical work on grid paper showing several incorrect function definitions and calculations:

- $f(4) - f(2) = 6$
- $f(2) = 6$
- $f(0) = 2$
- $f(1) = 4$
- $f(x) = 6$
- $f(x) = x^2 + 2$

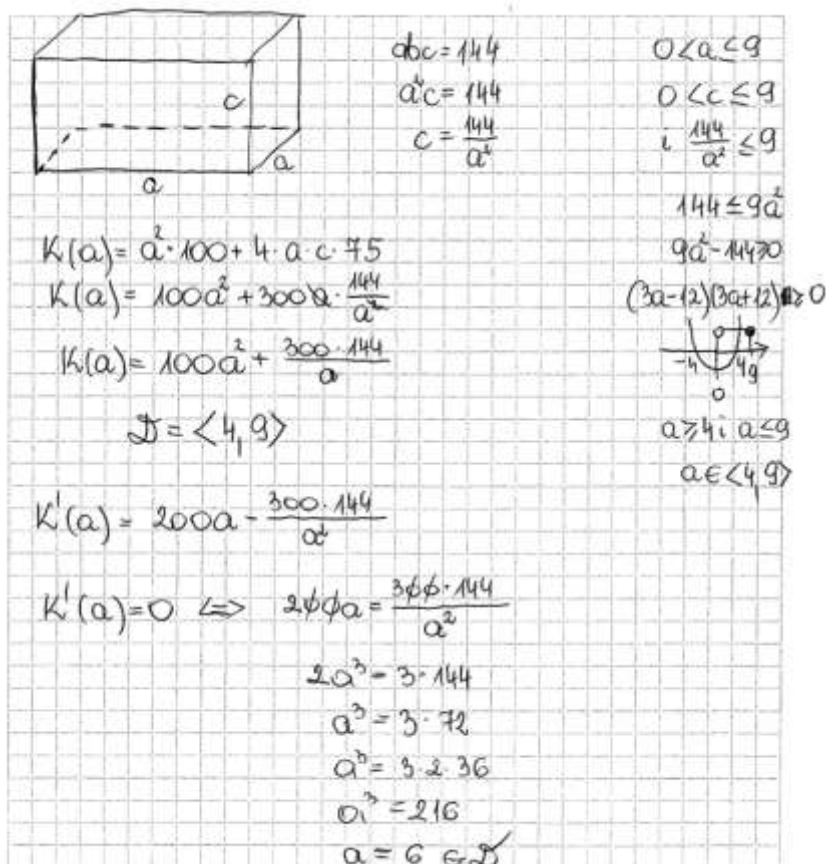
Maturzystom na poziomie rozszerzonym trudność sprawiło zadanie 15. – optymalizacyjne, wymagające zbudowania modelu matematycznego dla sytuacji realistycznej. W dużym stopniu na taki wynik wpłynął brak umiejętności budowania modelu matematycznego sytuacji realistycznej (wyznaczenie funkcji kosztu), wyznaczania dziedziny, uzasadniania, że wartość minimalna jest wartością najmniejszą, oraz fakt opuszczenia zadania przez niemały odsetek zdających. Kolejna duża grupa zdających była w stanie poprawnie wykonać tylko jeden z etapów zadania.

Zadanie optymalizacyjne, badające umiejętność modelowania matematycznego z wykorzystaniem rachunku różniczkowego, funkcjonuje w arkuszu egzaminacyjnym dla poziomu rozszerzonego od początku istnienia nowej formuły egzaminu, tj. od roku 2015. W poprawnym rozwiązaniu takiego zadania występują stałe elementy: określenie – najczęściej przez opis wzorem funkcji – konkretnego modelu matematycznego rozważanej sytuacji, uwzględnienie ograniczeń i zastrzeżeń wynikających z uwarunkowań geometrycznych lub algebraicznych, na przykład przez wyznaczenie dziedziny funkcji, zastosowanie rachunku różniczkowego do wyznaczenia wartości ekstremalnych przyjmowanych przez funkcję, ustalenie wartości największych lub najmniejszych z uwzględnieniem dziedziny badanej funkcji. Zadania te dotyczą zawsze badania sytuacji, w której występuje możliwość zmiany wartości lub rozmiarów pewnego obiektu. Na tegorocznym egzaminie przedmiotem rozważań było poszukiwanie wymiarów prostopadłościennego pojemnika o podstawie kwadratowej o najmniejszym możliwym koszcie jego wykonania (zadanie 15.). Zdający mieli ustalić zakres wartości liczbowych dla podstawy i wysokości pojemnika, przy których zadany pojemnik istnieje, zbudować matematyczny model realnej sytuacji opisanej w postaci funkcji opisującej zależność kosztu wytworzenia pojemnika od krawędzi podstawy pojemnika, wyznaczyć wymiary pojemnika z najmniejszym możliwym kosztem jego wytworzenia. Zatem do poprawnego rozwiązania, po zbudowaniu modelu matematycznego danej sytuacji, wystarczyło konsekwentnie zrealizować strategię, uwzględniającą typowe etapy rozwiązania zadania optymalizacyjnego.

Oto poprawne rozwiązanie zadania (przykład 72.). Zdający w pierwszej kolejności rozważył właściwe geometryczne uwarunkowania oraz ograniczenia co do wymiarów pojemnika podane w treści zadania i wyznaczył zakres wartości, które mogą być przyjmowane jako krawędź podstawy prostopadłościanu o podstawie kwadratowej. Następnie wykorzystał informację o kosztach wytworzenia poszczególnych ścian pojemnika i wyznaczył zależność kosztu wytworzenia pojemnika od krawędzi jego podstawy. Na koniec wykorzystał rachunek różniczkowy do wyznaczenia wartości ekstremalnych, ustalił wartość zmiennej, przy której funkcja kosztu przyjmuje wartość najmniejszą i wyznaczył wymiary prostopadłościennego pojemnika o podstawie kwadratowej o najmniejszych kosztach wytworzenia.

Przykład 72.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.



$$abc = 144$$

$$a^2c = 144$$

$$c = \frac{144}{a^2}$$

$$0 < a \leq 9$$

$$0 < c \leq 9$$

$$\frac{144}{a^2} \leq 9$$

$$144 \leq 9a^2$$

$$9a^2 - 144 \geq 0$$

$$(3a-12)(3a+12) \geq 0$$

$$-4 \leq a \leq 4$$

$$a \geq 4 \wedge a \leq 9$$

$$a \in [4, 9]$$

$$K(a) = a^2 \cdot 100 + 4 \cdot a \cdot c \cdot 75$$

$$K(a) = 100a^2 + 300a \cdot \frac{144}{a^2}$$

$$K(a) = 100a^2 + \frac{300 \cdot 144}{a}$$

$$D = \langle 4, 9 \rangle$$

$$K'(a) = 200a - \frac{300 \cdot 144}{a^2}$$

$$K'(a) = 0 \Leftrightarrow 200a = \frac{360 \cdot 144}{a^2}$$

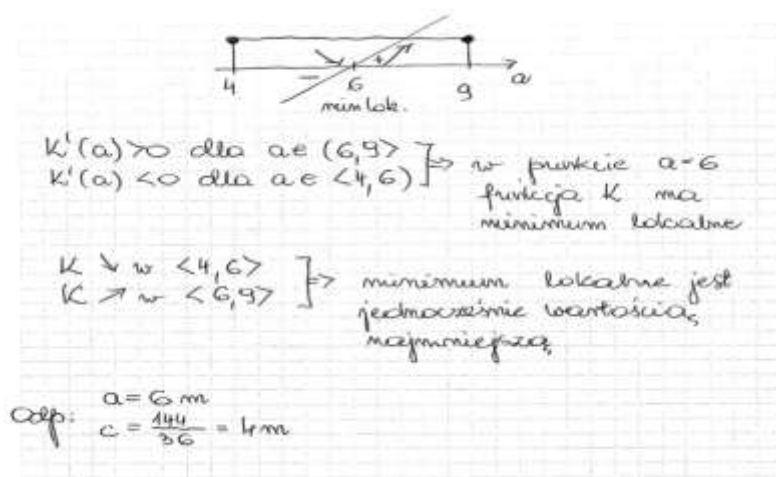
$$2a^3 = 3 \cdot 144$$

$$a^3 = 3 \cdot 72$$

$$a^3 = 3 \cdot 2 \cdot 36$$

$$a^3 = 216$$

$$a = 6 \in D$$



$$K'(a) > 0 \text{ dla } a \in (6, 9]$$

$$K'(a) < 0 \text{ dla } a \in [4, 6)$$

$$\Rightarrow \text{w punkcie } a = 6 \text{ funkcja } K \text{ ma minimum lokalne}$$

$$K \searrow \text{ w } \langle 4, 6 \rangle$$

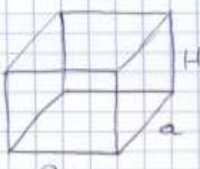
$$K \nearrow \text{ w } \langle 6, 9 \rangle \Rightarrow \text{minimum lokalne jest jednocześnie wartością najmniejszą}$$

$$\text{Odp. } a = 6 \text{ m}$$

$$c = \frac{144}{36} = 4 \text{ m}$$

Wśród rozwiązań zadania optymalizacyjnego dominowały takie, w których zdający podawali błędną dziedzinę funkcji (przykład 73.) oraz rozwiązania bez poprawnego uzasadnienia istnienia wartości najmniejszej badanej funkcji (przykład 74.).

Przykład 73.

$V = 144 \text{ m}^3$

 $V = P_p \cdot H = a^2 \cdot H$
 $144 = a^2 \cdot H$
 $H = \frac{144}{a^2}$
 $a, H > 0$
 $a, H \in (0, 9)$

$P_c = a^2 + 4aH =$
 $= a^2 + 4a \cdot \frac{144}{a^2} = a^2 + \frac{576}{a}$

$P'(a) = P'_c(a) = 2a - \frac{576}{a^2}$
 $P'_c(a) = 2a - \frac{576}{a^2}$

$f(a) > 0$
 $200 f'(a) = 200a - \frac{43200}{a^2} = \frac{200(a^3 - 216)}{a^2}$

$\frac{200}{a^2} \cdot (a^3 - 216) \geq 0$
 $a^3 - 216 > 0$
 $a^3 > 216$
 $a > 6$

ten iloraz
 jest zawsze
 dodatni więc
 nie ma wpływu na
 znak nierówn

	$(0, 6)$	6	$(6, 9)$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

najmniejszy koszt jest dla $a = 6$
 $H = \frac{144}{36} = 4$
 wymiary tego
 zbiornika to
 $6 \times 6 \times 4$

Przykład 74.

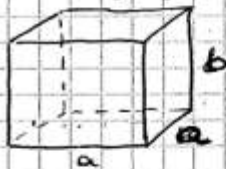
Zadanie 15. (0–7)

Pewien zakład otrzymał zamówienie na wykonanie prostopadłościennego zbiornika (całkowicie otwartego od góry) o pojemności 144 m^3 . Dno zbiornika ma być kwadratem. Żaden z wymiarów zbiornika (krawędzi prostopadłościanu) nie może przekraczać 9 metrów. Całkowity koszt wykonania zbiornika ustalono w następujący sposób:

- 100 zł za 1 m^2 dna
- 75 zł za 1 m^2 ściany bocznej.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.

$V = 144 \text{ [m}^3\text{]}$



$a, b, c < 9 \text{ m}$
 $a, b \leq 9 \text{ [m]}$

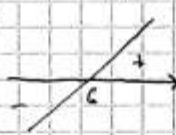
$D: \begin{cases} a \leq 9 \\ a > 0 \end{cases}$
 $a \in (0; 9)$

$a^2 \cdot b = 144 \Rightarrow b = \frac{144}{a^2}$

koszt całkowity $K(a) = 100 \cdot a^2 + 75 \cdot 4 \cdot a \cdot \frac{144}{a^2}$
 $K(a) = 100a^2 + 43200 \cdot a^{-1}$
 $K'(a) = 200a - 43200 \cdot a^{-2}$

NKIE $K'(a) = 0 \Leftrightarrow 200a - 43200a^{-2} = 0 \quad | \cdot a^2$
 $200a^3 - 43200 = 0$
 $a^3 = 216$
 $a = 6 \in D$

$a = 6 \Rightarrow b = \frac{144}{36} = 4$

$K(a)$ 

a	$(-\infty; 6)$	6	$(6; \infty)$
$K'(a)$	$-$	0	$+$
$K(a)$	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$

wymiary: $6 \times 6 \times 4 \text{ m}$

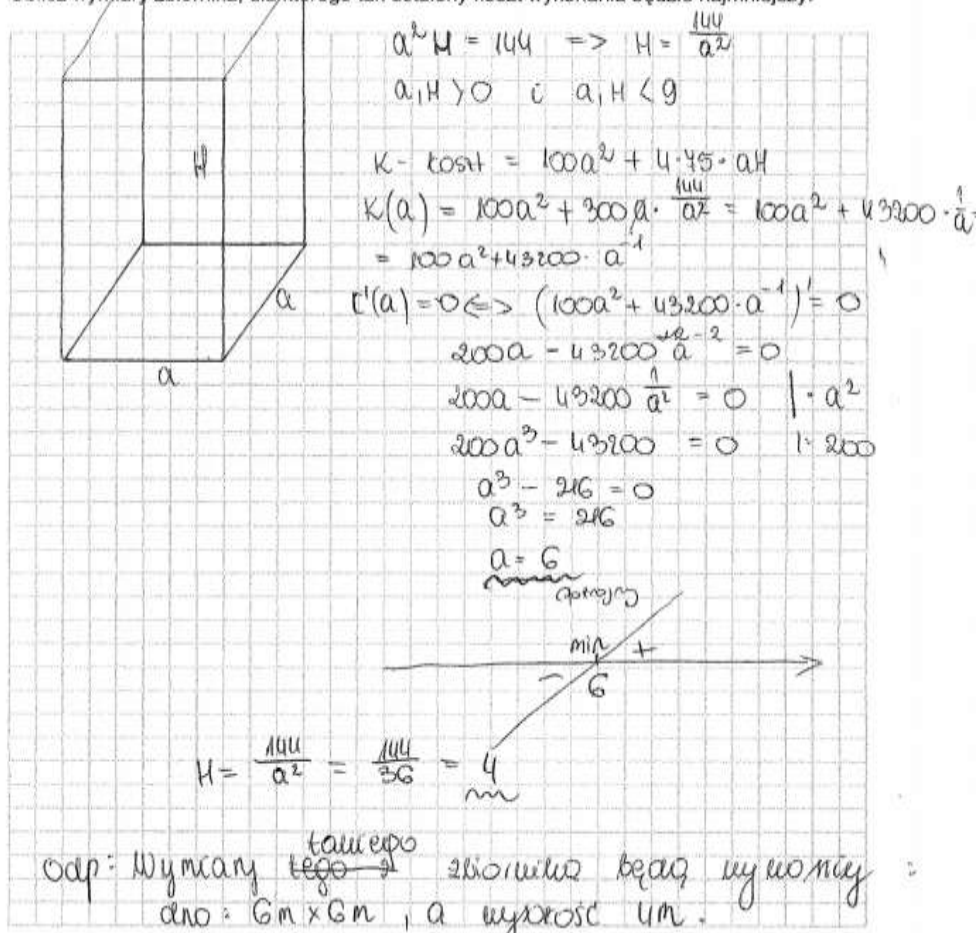
Zdający wyznaczył błędną dziedzinę funkcji kosztu jako przedział $(0, 9]$, a w uzasadnieniu najmniejszej wartości określa monotoniczność funkcji kosztu w $\mathbb{R}$.

Inni zdający, na etapie rozwiązania zadania wymagającym wykazania się umiejętnością zastosowania analizy matematycznej, byli w stanie wykonać tylko tę część rozwiązania, w której należy wyznaczyć pochodną funkcji i ustalić własności pochodnej potrzebnych do wnioskowania o ekstremach funkcji, a pomijali w swoich rozwiązaniach istotną część rozwiązania zadania optymalizacyjnego – uzasadnienie, że wartość ekstremalna jest wartością najmniejszą. Przykładem może być rozwiązanie prezentowane poniżej (przykład 75.). W przedstawionej sytuacji zdający koncentruje się na tej części rozwiązania, w której może wykazać się jedynie znajomością rachunku różniczkowego i zastosowaniem pochodnych do wyznaczania wartości ekstremalnych funkcji. Wyznaczenie możliwych wartości dla argumentów funkcji, dla których analizowane zagadnienie ma sens nie zostało przeprowadzone poprawnie, a uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji opisującej model w rozwiązaniu nie pojawiło się.

Przykład 75.

– 75 zł za 1 m² ściany bocznej.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.



Wśród zdających, którzy zbudowali poprawny model matematyczny opisanej sytuacji, na etapie rozwiązania zadania wymagającym wykazania się umiejętnością zastosowania analizy matematycznej, byli tacy, którzy stosowali, niewłaściwą w tym zadaniu, metodę prób i błędów, na podstawie wyników której wnioskowanie o najmniejszej wartości nie było uprawnione (przykład 76.).

Przykład 76.

$V = 144 \text{ m}^3$
 $V = a^2 \cdot H$
 $144 = a^2 \cdot H$
 $H = \frac{144}{a^2}$

$0 < a \leq 9$
 $0 < H \leq 9$

$\frac{144}{a^2} = \frac{9}{1}$
 $a^2 \geq 144$
 $a^2 \geq \frac{144}{9}$
 $a^2 \geq 16$
 $a \geq 4$

100×1 za 1 m^2 dna
 45×1 za 1 m^2 ścian bocznych
 (1600 zł podłoga)

$P_c = a^2 + 4aH = a^2 + 4a \cdot \frac{144}{a^2} = a^2 + \frac{576}{a}$

$K(a) = 100a^2 + 45 \cdot \frac{576}{a} = 100a^2 + \frac{25920}{a}$

$\phi =$

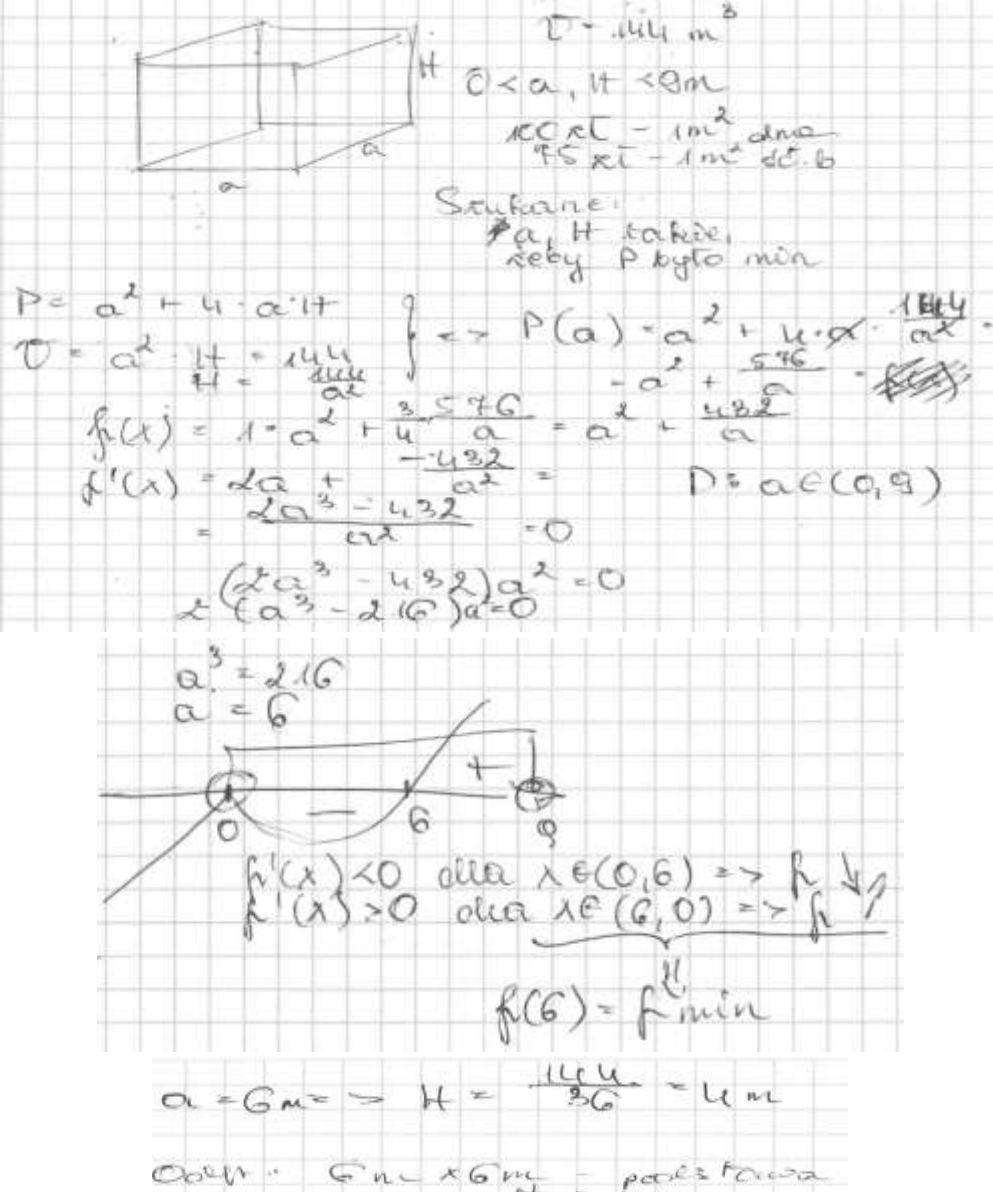
$K'(a) = 200a - \frac{25920}{a^2}$
 $\phi = \frac{200a^3 - 25920}{a^3} = \frac{200a^3 - 25920}{a^3}$
 $\phi = -\frac{3}{a} = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5}$
 $\phi = -\frac{200H}{100} = -2H = -2 \cdot \frac{144}{a^2} = -\frac{288}{a^2}$

$\Delta = 300H^2 - 400 = 300 \cdot \frac{144}{a^4} - 400$
 $\Delta = \frac{43200}{a^4} - 400$
 $\Delta = \frac{43200 - 400a^4}{a^4}$
 $\Delta = \frac{43200 - 400 \cdot 15^4}{15^4}$
 $\Delta = \frac{43200 - 400 \cdot 50625}{15^4}$
 $\Delta = \frac{43200 - 20250000}{15^4}$
 $\Delta = \frac{-20245680}{15^4}$
 $\Delta < 0$

Minimum kosztu wynosi 10000 zł przy $a = 12$.

$$V = 6.6 \cdot \frac{144}{0.6} = 154 \quad \checkmark$$

Warto podkreślić, że wśród maturzystów zdarzały się osoby poszukujące własnego sposobu rozwiązania, które zbudowały nieschematyczny, poprawny model matematyczny realnej sytuacji. Należy tym bardziej docenić takie działania, zwłaszcza w przypadku zadań postrzeganych przez większość zdających jako trudne. Przykład 77. jest ilustracją takiego rozwiązania. Zdający przedstawił model matematyczny opisanej sytuacji w postaci funkcji kosztów zapisanej z wykorzystaniem proporcji cen 1 i $\frac{3}{4}$, a nie 100 zł i 75 zł (niestety ustalił błędną dziedzinę funkcji i popełnił usterkę w zapisie uzasadnienia istnienia wartości najmniejszej).

Przykład 77.


$V = 144 \text{ m}^3$
 $0 < a, H < 9 \text{ m}$
 $100 \text{ zł} - 1 \text{ m}^2 \text{ dna}$
 $75 \text{ zł} - 1 \text{ m}^2 \text{ śc. b.}$
 Szukane:
 a, H takie, żeby P było min.

$P = a^2 + 4 \cdot a \cdot H$
 $V = a^2 \cdot H = 144$
 $H = \frac{144}{a^2}$

$\Leftrightarrow P(a) = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{144}{a^2} = a^2 + \frac{576}{a}$

$f(x) = 1 \cdot a^2 + 4 \cdot \frac{576}{a} = a^2 + \frac{432}{a}$
 $f'(x) = 2a + \frac{-432}{a^2} = \frac{2a^3 - 432}{a^2} = 0$
 $2a^3 - 432 = 0$
 $2(a^3 - 216)a^2 = 0$
 $a^3 = 216$
 $a = 6$

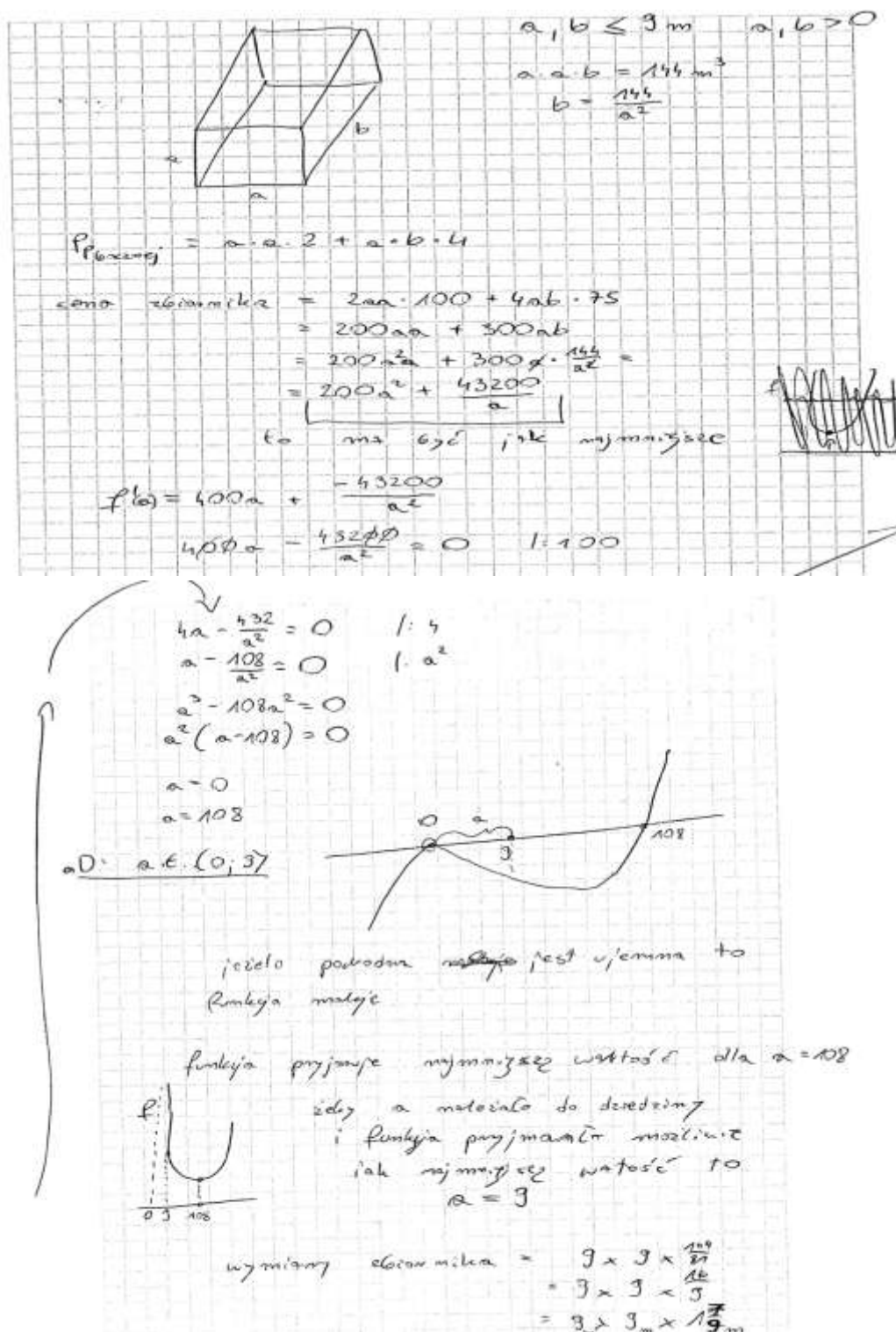
$f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 6) \Rightarrow f \searrow$
 $f'(x) > 0$ dla $x \in (6, 9) \Rightarrow f \nearrow$
 $f(6) = f''_{\min}$

$a = 6 \text{ m} \Rightarrow H = \frac{144}{36} = 4 \text{ m}$

Obekt: $6 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ – prostopadłościan

Kolejna duża grupa zdających nieuważnie odczytała z treści zadania uwarunkowania dotyczące liczby ścian tworzonego pojemnika. Zdający albo nie uwzględniali informacji, że pojemnik miał być otwarty od góry i zbudowali model sytuacji w postaci funkcji kosztu wytworzenia pojemnika z obiema podstawami (przykład 78.), albo nie uwzględniali wszystkich ścian bocznych w swoim rozwiązaniu przy modelowaniu funkcji kosztu (przykład 79.).

Przykład 78.



$a, b \leq 3 \text{ m} \quad a, b > 0$
 $a \cdot a \cdot b = 144 \text{ m}^3$
 $b = \frac{144}{a^2}$

$P_{\text{boxing}} = a \cdot a \cdot 2 + a \cdot b \cdot 4$

cena obrotowa = $2aa \cdot 100 + 4ab \cdot 75$
 $= 200aa + 300ab$
 $= 200a^2 + 300a \cdot \frac{144}{a^2}$
 $= 200a^2 + \frac{43200}{a}$

to ma być jak najmniejsze

$f'(a) = 400a - \frac{43200}{a^2}$
 $400a - \frac{43200}{a^2} = 0 \quad | : 100$

$4a - \frac{432}{a^2} = 0 \quad | : 4$
 $a - \frac{108}{a^2} = 0 \quad | \cdot a^2$
 $a^3 - 108a^2 = 0$
 $a^2(a - 108) = 0$
 $a = 0$
 $a = 108$

$a \in [0; 3]$

jeżeli pochodna jest ujemna to funkcja maleje

funkcja przyjmuje najmniejszą wartość dla $a = 108$

jeżeli a materiału do zrobienia i funkcja przyjmuje wartość jak najmniejszą wartość to $a = 3$

wymiar obrotowa = $3 \times 3 \times \frac{144}{27}$
 $= 3 \times 3 \times 3$
 $= 3 \times 3 \times 3 \text{ m}$

Przykład 79.

$V = 144 \text{ m}^3 \Rightarrow a^2 \cdot h = 144 \text{ m}^3$
 $P_p = a^2$
 $P_b = ah$
 $\text{Koszt } P_p = a^2 \cdot 100$
 $\text{Koszt } P_b = ah \cdot 75$
 $\text{Koszt}_c = a^2 \cdot 100 + 75ah$
 $h = \frac{144}{a^2}$
 $K_c = 100a^2 + \frac{75 \cdot 144}{a} = 25 \left(4a^2 + \frac{3 \cdot 144}{a} \right) =$
 $= 100 \left(a^2 + \frac{108}{a} \right)$
 $G(a)$
 $G'(a) = 2a - \frac{108}{a^2}$
 $2a - \frac{108}{a^2} \geq 0$
 $2a^3 - 108 \geq 0$
 $a^3 \geq 54$



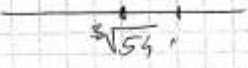
z at.
 $0 < a \leq 9$
 $0 < h \leq 9$

$0 \leq \sqrt[3]{54} \leq 9$
 $G(a) \nearrow$ dla $a \in (0; \sqrt[3]{54})$
 $G(a) \searrow$ dla $a \in (\sqrt[3]{54}; 9)$

$a = \sqrt[3]{54}$
 $h = \frac{144}{a^2} = \frac{144 \sqrt[3]{54}}{54} = \frac{8}{3} \sqrt[3]{54} > 9$

z at. $9 = \frac{144}{a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{144}{9}$
 $a \leq \frac{12}{3}$
 $a \leq 4$
 $a \leq \sqrt[3]{64}$

$\rightarrow a = \sqrt[3]{54}$
 $h = \frac{144}{\sqrt[3]{54}^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{54}} = \frac{144 \sqrt[3]{54}}{54} = \frac{8}{3} \sqrt[3]{54}$



Niemala część zdających nie uwzględniła w modelowaniu funkcji kosztu, a tylko funkcję pola powierzchni pojemnika i przeprowadziła badanie takiej funkcji (przykład 80.).

Przykład 80.

$P_c = P_p + P_b$ $V = 144 \text{ m}^3$ $V = a \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b$
 $P_c = a^2 + 4ab$ $144 = a^2 \cdot b$
 $P_c \rightarrow \text{na min}$ $b = \frac{144}{a^2}$
 $P(a) = a^2 + 4 \cdot \frac{144}{a^2}$
 $P(a) = a^2 + \frac{576}{a^2}$
 $P'(a) = \frac{2a - \frac{1152}{a^3}}{a^4} = \frac{2a^4 - 1152}{a^4}$ $D(P_c) = D(P_a)$
 $P'(a) = \frac{2a^4 - 1152}{a^4}$
 $2a^4 - 1152 = 0 : 2$
 $a^4 - 576 = 0$
 $a(a^3 - 576) = 0$
 $a(a^2 - 24)(a^2 + 24) = 0$
 $a(a^2 - 24)(a - \sqrt{24})(a + \sqrt{24}) = 0$

$a > 0$
 $b > 0$
 $a < 9$
 $b < 9$
 $\frac{144}{a^2} > 0$ $\frac{144}{a^2} < 9$
 $144 < 9a^2$
 $a^2 > \frac{144}{9}$
 $a^2 > 16$
 $a > 4$
 $(4 - 4)(4 + 4) > 0$
 $-40 < 0$
 $D(P_c) = (4, 9)$

a	4	$(4, \sqrt{24})$	$\sqrt{24}$	$(\sqrt{24}, 9)$	9
$P'(a)$	-	-	0	+	-
$P(a)$	-	-	min lokalne	+	-

$P(a)$ będzie najmniejsze dla $a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$$a = \sqrt{24} \in D(P_c)$$

$$a \times a \times b$$

$$b = \frac{144}{(\sqrt{24})^2} = \frac{144}{24} = 6 \text{ m}$$

$$2\sqrt{6} \text{ m} \times 2\sqrt{6} \text{ m} \times 6 \text{ m}$$

$$2\sqrt{6} \text{ m}, 2\sqrt{6} \text{ m}, 6 \text{ m}$$

$P(a) \rightarrow \text{najm. to koszt wykonania najm.}$

Powyższe przykłady wskazują na to, iż maturzyści niewłaściwie rozwiązywali zadanie optymalizacyjne przy wykorzystaniu rachunku pochodnych. Powszechnym zjawiskiem jest brak zrozumienia istoty zagadnień optymalizacyjnych, a w szczególności konieczności rozważania geometrycznych i algebraicznych uwarunkowań oraz kontekstów realistycznych przy określaniu modelu matematycznego, a także rozumienia właściwego zastosowania rachunku różniczkowego do badania własności funkcji.

Podkreślić należy, że materiały informacyjne dotyczące egzaminu maturalnego w formule obowiązującej od 2015 r. od początku zawierały zapis o zamieszczaniu w każdym arkuszu maturalnym dla poziomu rozszerzonego zadania z zagadnieniem optymalizacyjnym.

Problematyka, którą te zadania poruszają, wymaga zbudowania matematycznego modelu rozważanej sytuacji lub wykazania poprawności podanego modelu, a następnie wieloetapowej strategii rozwiązania. Stąd wysoka liczba punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie tego typu zadania, znacząco decydująca o wyniku całego egzaminu.

Zagadnienia optymalizacyjne są często traktowane przez uczniów i nauczycieli jako swoisty algorytm postępowania, którego stałe elementy (etapy) wymagają każdorazowo specyficznej realizacji ze względu na różnorodność badanych sytuacji. Jednakże odmienność kolejnych rozważanych zagadnień od wcześniej zbadanych w rozwiązanych już zadaniach decyduje o tym, że maturzyści uważają ten typ zadań za trudny.

Kolejnym zadaniem na poziomie podstawowym wymagającym stworzenia modelu matematycznego było zadanie 34., sprawdzające umiejętność obliczania prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach i zastosowania klasycznej definicji prawdopodobieństwa. Zadanie dotyczyło dwukrotnego rzutu symetryczną sześcienną kostką do gry. Należało obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 4 lub 5, lub 6.

Zdający musiał obliczyć liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 36$, wyznaczyć wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , obliczyć ich liczbę i, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa, obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Liczbę elementów zdarzenia A zdający mógł

wyznaczyć wypisując wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A :

$A = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$

(przykład 81.) i zliczyć je, bądź sporządzając tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu

(przykład 82.), bądź rysując drzewo stochastyczne rozważanego doświadczenia

(przykład 83.).

Przykład 81.

$$\begin{aligned} \Omega = & \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ & (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ & (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ & (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ & (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ & (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{12}{36}$$

$$|\Omega| = 36$$

$$|A| = 12$$

Przykład 82.

$$\Omega = 6 \cdot 6 = 36$$

A - suma oczek równa 4 lub 5 lub 6

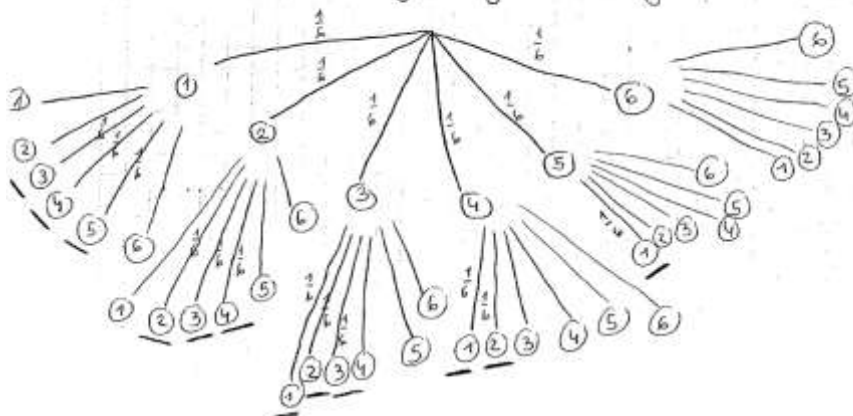
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\bar{A} = 12$$

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Przykład 83.

A - suma dwóch wyrzucanych oczek jest równa 4 lub 5 lub 6



$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

$$P(A) = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot 12 = \frac{1}{36} \cdot \frac{12}{1} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Część zdających pomijała niektóre zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i otrzymywała błędny wynik. Przykładami 84. i 85. ilustrujemy takie błędne rozwiązania.

Przykład 84.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$|\Omega| = 36$$

$$|A| = 11$$

$$P(A) = \frac{11}{36}$$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – cyfry z kostki

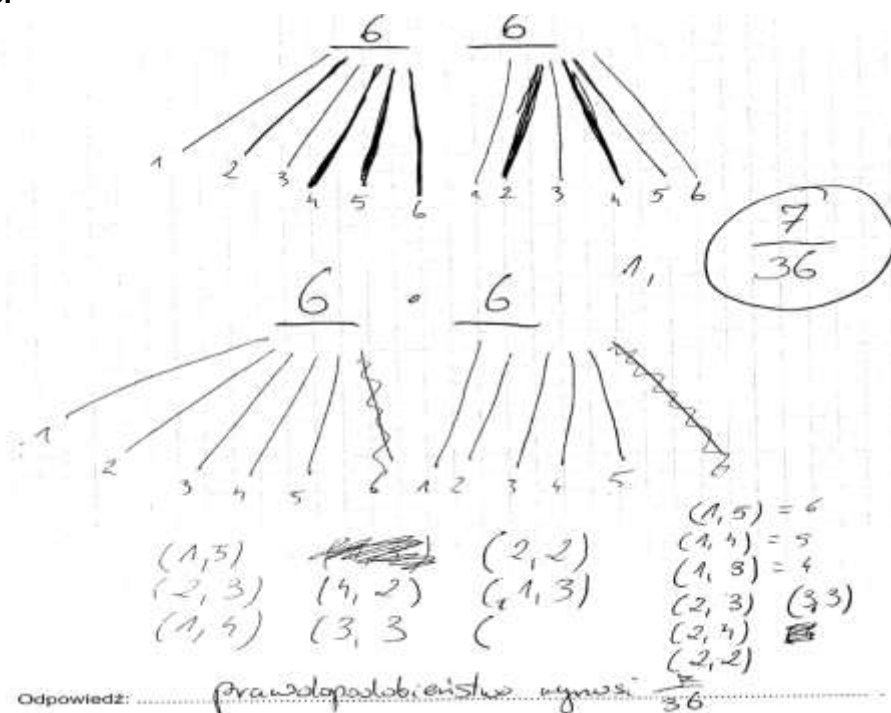
Dwuokrotnie rzucamy $\rightarrow 6 \cdot 6 = 36$

+suma	1	2	3	4	5	6		
1			X	X	X	X	✓ 3	} 11
2		X	X				✓ 2	
3	X	X	X				✓ 3	
4	X	X					✓ 2	
5	X						✓ 1	
6	X							

Suma 4, 5 lub 6

Odpowiedź: $P(A) = \frac{11}{36}$ Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{11}{36}$

Przykład 85.



Niektórzy zdający błędnie wyznaczali zbiór zdarzeń elementarnych mnożąc rzuty kostką w danym doświadczeniu i obliczali liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych jako 72, co świadczy o braku umiejętności budowania modelu przestrzeni probabilistycznej.

Kolejnym zadaniem, które sprawiło problemy tegorocznym maturzystom zdającym egzamin na poziomie rozszerzonym, wymagające od zdających umiejętności modelowania matematycznego, było zadanie 9. Poziom wykonania tego zadania to 30%. Maturzyści zmierzali się w tym zadaniu z zagadnieniem prawdopodobieństwa warunkowego. Zdający musiał prawidłowo obliczyć liczbę wszystkich liczb czterocyfrowych podzielnych przez 18 oraz liczb podzielnych przez 18 i 15 (czyli przez 90) oraz zastosować wzór na prawdopodobieństwo warunkowe.

Aby obliczyć liczbę wszystkich liczb czterocyfrowych podzielnych przez 18, zdający mógł skorzystać z faktu, że co osiemnasta liczba czterocyfrowa jest podzielna przez 18 (przykład 86.) lub zastosować wzór na ciąg arytmetyczny (przykład 87.). Poniżej zamieszczamy poprawne rozwiązania tego zadania.

Przykład 86.

$x/15 \rightarrow x/3 \wedge x/5$ ostatnia cyfra to 0 lub 5
 suma cyfr jest podzielna przez 3
 $x/18 \rightarrow x/9 \wedge x/2$ ostatnia cyfra parzysta (0, 2, 4, 6, 8)
 suma cyfr jest równa przez 9
 x - liczy czterocyfrowe o sumie cyfr podzielnej przez 9 i ostatniej cyfry równy 0
 Liczb 4 cyfrowych jest $9999 - 999 = 9000$
 to 18 dzieli się przez 18 czyli $|S| = 500$
 Liczby które dzielą się przez 18 i 15 to liczby podzielne przez 90, ~~100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 210, 220, 230, 240, 250, 260, 270, 280, 290, 300, 310, 320, 330, 340, 350, 360, 370, 380, 390, 400, 410, 420, 430, 440, 450, 460, 470, 480, 490, 500, 510, 520, 530, 540, 550, 560, 570, 580, 590, 600, 610, 620, 630, 640, 650, 660, 670, 680, 690, 700, 710, 720, 730, 740, 750, 760, 770, 780, 790, 800, 810, 820, 830, 840, 850, 860, 870, 880, 890, 900, 910, 920, 930, 940, 950, 960, 970, 980, 990, 1000~~

$$\begin{array}{r} 18 \overline{) 913} \\ \underline{90} \\ 13 \\ \underline{18} \\ 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \overline{) 913} \\ \underline{90} \\ 13 \\ \underline{15} \\ 11 \end{array}$$

 $NW = 90$
 Liczb 4 cyfrowych podzielnych przez 90 jest 100, bo
 w 90, z nich dzieli 90, $\Rightarrow |A| = 100$
 $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$
 Liczba zdarzeń gdy cyfry
 pierwsz i ostatnia jest podzielna przez 15 i 18

Przykład 87.

Dosć: 2 liczb naturalnych, 4-cyfrowych losujemy 1 liczbę

A – wylosowana liczba jest podzielna przez 15.

B – wylosowana liczba jest podzielna przez 18.

$$S = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{B}$$

$A \cap B$ – liczba podzielna przez 15 i 18

od 1000 do 9999 $\rightarrow$ 9000 liczb

$$a_1 = 1005 \mid 15 \quad b_1 = 1008 \mid 18$$

$$a_n = 9990$$

$$b_n = 9990$$

$$1005 + (n-1) \cdot 15 = 9990$$

$$1008 + (n-1) \cdot 18 = 9990$$

$$15(n-1) = 8985$$

$$18(n-1) = 8982$$

$$n-1 = 599$$

$$n-1 = 499$$

$$n = 600 \text{ liczb}$$

$$n = 500 \text{ liczb}$$

$$\bar{B} = 500$$

$$1080 \mid 15 \quad 1080 \mid 18$$

$$c_1 = 1080 \quad c_n = 9990$$

$$1080 - 990 = 90 = r$$

$$P(A/B) = \frac{100}{500}$$

$$1080 + (n-1) \cdot 90 = 9990$$

$$90(n-1) = 8910$$

$$P(A/B) = \frac{1}{5}$$

$$(n-1) = 99$$

$$n = 100 \text{ liczb}$$

$$|A \cap B| = 100$$

Część zdających zauważała, że liczby podzielne przez 15 i 18, to liczby podzielne przez 90 i na takim wniosku opierała dalsze rozwiązanie (przykład 88.).

Przykład 88.

ile przez 18

1008 - min
9990 - max

$a_1 = 1008$, $r = 18$, $a_n = 9990$

$a_n = a_1 + (n-1)r$
 $9990 - 1008 = 18(n-1)$
 $8982 = 18n - 18$
 $9000 = 18n$
 $n = 500$

$\Sigma = 500$

$p = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$

$\text{NWW}(15, 18) = 90$

czyli liczba musi być podzielna przez 90

1080 - najmniejsza liczba
9990 - największa liczba

jest to ciąg arytmetyczny gdzie $a_1 = 1080$, $r = 90$

$a_n = a_1 + (n-1)r$
 $9990 = 1080 + (n-1)90$
 $8910 = 90n - 90$
 $9000 = 90n$
 $n = 100$

podzielnych przez 15 i 18 jest 100

$A = 100$

Niektórzy zdający ilustrowali sposób obliczania liczby liczb podzielnych przez 15 oraz przez liczby 15 i 18 poprzez wypisanie kilku początkowych liczb spełniających te warunki, a następnie odrzucali liczby trzycyfrowe oraz mniejsze i podawali poprawną liczbę (przykład 89.).

Przykład 89.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$\bar{B}$ - prawd. wylosowania liczby podzielnej przez 18
 $\bar{A}$ - prawd. wylosowania liczby podzielnej przez 15
 $A \cap B$ - prawd. wylosowania liczby podzielnej przez 15 i 18

~~.....~~
~~.....~~
~~.....~~
~~.....~~

$A \cap B$ - 90, 180, 270, 360, ... $\Rightarrow$ 111 takich liczb
 $\bar{B}$ - 18, 36, 54, ... $\Rightarrow$ 555 takich liczb

~~.....~~
~~.....~~

$A \cap B = 111 - 11 = 100$
 $\bar{B} = 555 - 55 = 500$

$P(A|B) = \frac{1}{5}$

} ODJĄTEM
 TRZECYFROWE
 I
 MNIEJSZE

Wśród zdających byli i tacy, którzy choć zastosowali poprawną metodę zliczania elementów zbioru A i $A \cap B$ oraz poprawnie obliczyli moce tych zdarzeń, to obliczając prawdopodobieństwo warunkowe do wzoru, podstawiali nieodpowiednie dane (przykład 90.).

Przykład 90.

$1000 \rightarrow 9999$ $9999 - 1000 + 1 = 9000$ możliwości
 $| \Omega | = 9000$
 $1008 \rightarrow 9990$ ~~liczby podzielne przez 18~~
 $a_1 = 1008$ $9990 = 1008 + (n-1)18$
 $a_n = 9990$ $8982 = 18n - 18$
 $r = 18$ $5000 = 18n$
 $n = ?$ $500 = n \rightarrow 500$ liczb podzielnych przez 18
 $NWD = 90 = 5 \cdot 18 = 6 \cdot 15$
 $1080 \rightarrow 9990$
 $a_1 = 1080$ $9990 = 1080 + (n-1)90$
 $a_n = 9990$ $8910 = 90n - 90$
 $r = 90$ $9000 = 90n$
 $n = ?$ $100 = n \rightarrow 100$ liczb podzielnych przez 15 i 18
 $|A| = 100$
 $A =$ liczba jest podzielna przez 15 i 18
 $P(A) = \frac{100}{9000} = \frac{1}{90}$

Niektórzy ze zdających błędnie wyznaczali już sam zbiór zdarzeń elementarnych (przykład 91.).

Przykład 91.

Zadanie 9. (0-4)
 Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

$\Omega = 8999$
~~liczby $\in (1000, 9999)$~~
~~Podzielne przez 18 są:~~
~~18, 36, 54, 72, 90, 108,~~
~~126, 144, 162, 180 itd.~~
 b) Podzielne przez 18 są: w 9900 jest 550 takich liczb
 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180 i pozostałych 550 liczbach
 Liczb podzielnych przez 18 jest jeszcze 5 takich liczb
 W pierwszym 1000 jest 95 takich liczb
 $\Rightarrow$ liczb podzielnych przez 18 w tym przedziale jest $550 + 5 - 95 = 560 = A$
 A: 8 liczb podzielnych przez 15 i 18 w tym przedziale:
 90 do wielokrotności liczby 90.
 1080, 1170, 1260, 1350, 1440, 1530, 1620, 1710,
 1800, 1890, 1980 w każdym tym jest 11 takich
 liczb $\Rightarrow 88$ takich liczb w całym przedziale.
 $P(B) = \frac{560}{8999}$ $P(A \cap B) = \frac{88}{8999}$
 $P(A|B) = \frac{\frac{88}{8999}}{\frac{560}{8999}} = \frac{88}{560} = \frac{11}{70}$

Część zdających miała dobrą ideę na zbudowanie modelu probabilistycznego z wykorzystaniem ciągu arytmetycznego, ale błędnie stosowali wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego. Przykładem 92. ilustrujemy takie rozwiązanie.

Przykład 92.

$\Omega = \overline{10000} \ 9000$
 $P(A)$ – wylosowana liczba jest podzielna przez 15 i 18

Liczba jest podzielna przez 18, jeśli jest podzielna przez 9 i 2
 Liczba jest podzielna przez 15, jeśli jest podzielna przez 3 i 5
 a zatem liczba musi być podzielna przez $9 \cdot 2 \cdot 5 = 90$
 Pierwsza liczba podzielna przez 18 jest 1008.
 Pierwsza liczba podzielna przez 15 i 18 jest ~~1008~~ 1080

Ciąg arytmetyczny: $a_1 = 1080$ $r = 90$ n – liczba podzielnych liczb przez 15 i 18
 $9999 = 1080 + n \cdot 90 + r$
 $8919 = 8919$
 $r = 9$
 $n = 99$

a zatem jest 99 liczb podzielnych przez 15 i 18.

Podzielne tylko przez 18: $a_1 = 1008$ $n_1 = 18$
 $9999 = 1008 + 18n_2 + r_2$
 $8991 = 18n_2 + r_2$
 $8991 = 499n_2 + 9$
 $\Omega_2 = 499$

A zatem jest 499 liczb podzielnych przez 18

$P(A) = \frac{99}{499}$

Część zdających błędnie ustaliła pierwszy lub ostatni wyraz ciągu arytmetycznego, lub różnicę tego ciągu. Przykład 93. ilustruje takie rozwiązanie.

Przykład 93.

$|S_4| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

$A = \text{podzielne przez } 18 = \text{podzielne przez } 3$

$a_1 = 1000$
 $a_1 = 1008$
 $a_1 = 1016$

$r = 18$

$a_n = 1008 + (n-1)18$

$a_n = 9000$

$9000 = 1008 + 18n - 18$
 $n = 445$
 tylko jest liczb podzielnych przez 18

$S_n = \frac{1008 + 9000}{2} \cdot n$

$b_1 = 1005$
 $b_1 = 9000$

$r = 15$

$b_n = 1005 + 15n - 15$
 $n = 533$ liczb podzielnych przez 15

największym wspólnym $\vee 18, 15 \Rightarrow 90$

$c_1 = 1080$
 $c_1 = 9000$

$r = 90$

$c_n = 1080 + 90n - 90$
 $n = 89$ wspólnie

podzielne przez 10 i 15

$534 \sim 89$

$\frac{89}{445} = \frac{1}{5}$

wszystkie podzielne przez 10

odp.

Niektórzy zdający dodatkowo popełniali błędy rachunkowe i nie otrzymywali poprawnej liczby zdarzeń.

Wśród zdających byli i tacy, którzy pomijali niektóre elementy zbioru liczb podzielnych przez 15, albo przez 18, albo przez 90. Przykład 94. jest ilustracją takich błędnych rozwiązań.

Przykład 94.

$1521 = 8999$

liczba podzielna przez 15, gdy
jednocześnie jest podzielna przez 3 i 5!

liczba podzielna przez 18, gdy
jednocześnie jest podzielna przez 2 i 9.

A - liczby podzielne przez 15
 $A = \{ (1005, \dots, 1110, \dots, 1200) \}$
 $\dots 1305, \dots, 1410, \dots, 1500, \dots$
 $\dots 1605, \dots, 1710, \dots, 1800, \dots$
 $\dots 1905, \dots, 2010, \dots, 2100, \dots$

A - ~~2020~~ 600 liczb sterocyfrowych
podzielnych przez 15

B - liczby podzielne przez 18
 $B = (1008, \dots, 1098, 1116, \dots, 1206)$
 $\dots 1314, \dots, 1404, \dots, 1494, \dots$
 $\dots 1584, \dots, 1674, \dots, 1764, \dots$
 $\dots 1854, \dots, 1944, \dots, 2034, \dots$
 $\dots 2124, \dots, 2214, \dots, 2304, \dots$

$B = 499$ Prawda: uśredniając.

$P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = \frac{101}{499}$

$P(A \cap B) = \frac{101}{499} = \frac{101}{499}$

$P(A \cap B) = \frac{101}{499}$

Były również i takie rozwiązania, w których zdający próbowali wyznaczyć liczbę zdarzeń sprzyjających przez ustawianie, korzystając z reguły mnożenia, często zakończoną uzyskaniem niepoprawnej liczby zdarzeń sprzyjających (przykład 95.).

Przykład 95.

$\Omega = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ możliwości
 $(A) = 13, 9, 2, 2, 8, 6, 7, 3, 9, 1$
 $(A) = 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 1 = 567$
 $P(A) = \frac{567}{9000}$

liczba podzielna przez 18 i 15

2200
 1800
 3600
 8000
 2700
 2390
 2070
 3240
 2880
 2610

Na podstawie przedstawionej analizy można sformułować wniosek, że część zdających nie ma problemu z modelowaniem matematycznym, potrafi dobrać odpowiedni model do sytuacji opisanej w treści zadania, poprawnie operuje obiektami matematycznymi, potrafi poprawnie wydzielić obiekty i ustalić relacji między nimi. Jednakże, wcale nie miała część zdających, zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym, nie opanowała umiejętności budowania i dobierania modelu matematycznego.

Wnioski i rekomendacje

1. Egzamin maturalny z matematyki na **poziomie podstawowym** potwierdził, że maturzystom nie sprawiają trudności zadania sprawdzające pojedyncze, mało skomplikowane umiejętności, wymagające wykonania jednej lub dwóch czynności.
2. Najlepsze wyniki na **poziomie podstawowym** zdający uzyskali w zadaniach zamkniętych, które sprawdzały umiejętności: wykonywania obliczeń procentowych, stosowania wzoru na n-ty wyraz i na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, stosowania twierdzenia Pitagorasa, wyznaczania średniej i mediany zestawu danych oraz korzystania z własności kątów i przekątnych w równoległobokach. Tym samym potwierdza się teza, że zdający osiągają bardzo dobre wyniki w zadaniach krótkich, wymagających jedynie zastosowania wzorów. Trzeba zaznaczyć, że do zadań z dobrym wynikiem należą też takie, które wymagały przeprowadzenia krótkiego rozumowania lub połączenia kilku własności obiektów matematycznych.
3. Na **poziomie rozszerzonym** dla tegorocznych maturzystów nie było zadań łatwych, a jedynie trzy zadania były umiarkowanie trudne. Najlepsze wyniki zdający uzyskali w zadaniu, które sprawdzało umiejętność obliczania granic ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów i zakodowania otrzymanego wyniku, a także w zadaniu z geometrii analitycznej, przy rozwiązywaniu którego należało wykazać się umiejętnością wyznaczenia równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, obliczenia odległości punktu od prostej, jak też wyznaczenia współrzędnych punktu styczności okręgu i prostej. W odróżnieniu od lat ubiegłych tylko jedno zadanie zamknięte okazało się umiarkowanie trudne dla zdających. Było to zadanie z trygonometrii, w którym należało wykorzystać wzór na cosinus kąta podwojonego i wyznaczyć wartość funkcji cosinus kąta o mierze wyrażonej w stopniach.
4. Podobnie jak w latach ubiegłych maturzyści lepiej radzą sobie z rozwiązaniem zadań, w których należy wykorzystać znany algorytm, niż z zadaniami wymagającymi zaplanowania strategii rozwiązania, modelowania matematycznego czy uzasadnienia postawionej tezy. Wyniki egzaminu maturalnego wyraźnie wskazują, że najwięcej trudności na egzaminie z matematyki sprawiają maturzystom zadania wymagające uzasadnienia prawdziwości tezy. Zadania wymagające przeprowadzenia rozumowania i przytoczenia poprawnej argumentacji są znacznie częściej od innych pomijane, a wśród tych zdających, którzy podejmują próbę ich rozwiązania, jest wielu wnioskujących o prawdziwości tezy na podstawie sprawdzenia poprawności dla kilku wybranych wartości albo nieuprawnionym przyjmowaniu szczególnych założeń o rozważanych obiektach matematycznych. Często też zdający pomijają istotną część rozumowania lub nie podają jakiegokolwiek komentarza w kluczowych miejscach przedstawianego uzasadnienia. Często są również rozwiązania, w których zdający poprawnie rozpoczynają rozwiązywanie zadania, zauważając istotne zależności w obiektach matematycznych, jednak nie doprowadzają rozwiązania do końca, ponieważ nie potrafią powiązać ze sobą otrzymanych zależności. Umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja* okazały się najtrudniejszymi zadaniami zarówno na **poziomie podstawowym** jak i **rozszerzonym** (na poziomie podstawowym najtrudniejszym było zadanie polegające na przeprowadzeniu dowodu

- algebraicznego, a na poziomie rozszerzonym najniższy poziom wykonania osiągnęło zadanie, w którym należało przeprowadzić dowód geometryczny).
5. Zarówno na **poziomie podstawowym**, jak i **poziomie rozszerzonym**, egzamin ujawnił niski poziom opanowania przez zdających umiejętności z zakresu geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Dotyczy to głównie zadań rozszerzonej odpowiedzi, w których należało użyć lub stworzyć strategię rozwiązania, łącząc w spójną, logicznie uporządkowaną całość kilka pojedynczych umiejętności. Przyczyn niepowodzeń zdających w takich zadaniach należy upatrywać w braku umiejętności czytania treści zadania ze zrozumieniem i poprawnej jej interpretacji. Opanowanie tych umiejętności umożliwia stworzenie całościowej koncepcji rozwiązania. Jednak warto zwrócić uwagę, że większość maturzystów chętnie, i na ogół poprawnie, rozwiązywała krótkie zadania geometryczne, w których zamieszczono rysunek, oraz takie, w których sporządzenie rysunku ułatwiało rozwiązanie.
 6. Na wyniki egzaminu z matematyki najczęściej znacząco wpływa brak sprawności rachunkowej oraz problemy z poprawnym wykonywaniem obliczeń rachunkowych. W rozwiązaniach zadań otwartych błędy rachunkowe nierzadko utrudniają lub uniemożliwiają dokończenie rozwiązania albo doprowadzają do otrzymania wyników niespełniających warunków zadania. Najczęściej zdający w wyniku popełnianych błędów nie mają szansy rozstrzygać kwestii, które pozwoliłyby na sprawdzenie opanowania przez nich umiejętności potrzebnych do prawidłowego rozwiązania zadania. Brak odpowiedniej sprawności rachunkowej doprowadza często do otrzymania wyników, których maturzyści nie potrafią właściwie zinterpretować, ujawniając brak zrozumienia pojęć i własności obiektów matematycznych, który jest najczęstszą przyczyną niepowodzeń. Trudności w wykonywaniu obliczeń sygnalizują konieczność zwrócenia uwagi w trakcie nauki na staranne ich wykonywanie. Jest to ważne na każdym etapie edukacyjnym, a trzeba podkreślić, że wiele popełnianych błędów to efekt niewłaściwego opanowania treści nauczania w szkole podstawowej czy w gimnazjum. Konieczne jest także weryfikowanie poprawności otrzymanego wyniku, a w przypadku wyników sprzecznych z treścią zadania nie do przecenienia jest wskazywanie tych niezgodności, by kształtować umiejętność określania obiektów matematycznych wyznaczonych przez konkretne wartości liczbowe lub umiejętność wykazywania braku istnienia obiektów, które są konsekwencją uzyskanych wyników.
 7. Niemniejszy wpływ na wyniki egzaminu ma relatywnie niski poziom umiejętności rozumienia tekstu matematycznego. Świadczą o tym nieudane próby podjęcia rozwiązania zadań, gdzie już w początkowej fazie tworzenia strategii rozwiązania zdający przystępują do rozważania sytuacji odmiennych od wynikających z treści zadań. W trakcie procesu kształcenia nauczyciele powinni nadać duże znaczenie początkowej fazie rozwiązywania zadania, tj. precyzyjnemu ustaleniu istoty rozwiązywanego problemu i rozumieniu opisanej sytuacji, a także zwracać uwagę na to, że pozornie drobna zmiana w treści zadania wymaga zastosowania zupełnie innego rozumowania. Należy ćwiczyć z uczniami rozwiązywanie zadań różnymi sposobami, ukazując tym samym różnorodność strategii rozwiązywania problemów matematycznych.
 8. W trakcie nauki należy koniecznie zwracać uwagę na staranne i sprawne wykonywanie przekształceń i obliczeń. Nieodzowne jest weryfikowanie poprawności otrzymanego wyniku, a w przypadku wyników niezgodnych z treścią zadania wyjaśnianie sprzeczności, aby kształtować umiejętność określania obiektów matematycznych wyznaczonych przez konkretne wartości liczbowe. Ten aspekt był

istotny m. in. w zadaniu z równaniem trygonometrycznym, w którym część zdających rozwiązywała je metodą analizy starożytnych i nie potrafiła wybrać właściwych rozwiązań równania, a odrzucić rozwiązań obcych.

9. W nauczaniu geometrii należy zwrócić szczególną uwagę na poprawną interpretację treści zadań i rozważanie właściwych figur geometrycznych oraz ich elementów. Przegląd rozwiązań zdających prowadzi do wniosku, aby w zadaniach z geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej doskonalić umiejętność analizy zadania, doboru adekwatnej strategii rozwiązania wynikającej wprost z treści zadania (**poziom podstawowy**), a na **poziomie rozszerzonym** doskonalić umiejętność samodzielnego tworzenia przez uczniów strategii na podstawie wnikliwej analizy treści zadania i identyfikowania istotnych dla rozwiązania etapów.